ТВОРЕНІЯ

АРХИМЕДА.

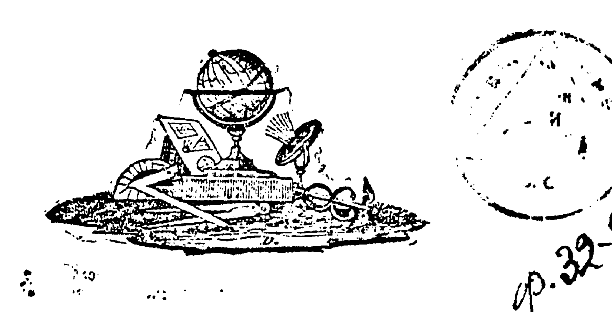

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

АРХИМЕДА
ДВѢ КНИГИ
О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ, ИЗМѢРЕНІЕ КРУГА И ЛЕММЫ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ ГРЕЧЕСКАГО
(ЛЕММЫ СЪ ЛАТИНСКАГО)

Ѳ. ПЕТРУШЕВСКАГО.

Съ примѣчаніями и пополненіями.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ,
ВЪ ТИПОГРАФІИ ДЕПАРТАМЕНТА НАРОДНАГО ПРОСВѢЩЕНІЯ.
1823.

(Archimedes), vir stupendæ sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventionum ferè omnium, de quibus promovendis ætas nostra gloriatur.

WALLIS.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи, до выпуска изъ Типографіи, представлены были въ Цензурный Комитетъ *семь* экземпляровъ сей книги для препровожденія куда слѣдуетъ, на основаніи узаконеній. Санктпетербургъ, Іюля 24 дня, 1822 года.

Цензоръ А. Бируковъ.



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Архимедъ, величайшій Геометръ древнихъ вѣковъ, родился за 287 лѣтъ до Р. Х. въ Сиракузахъ, отъ одной знаменитой фамиліи. Будучи еще въ молодыхъ лѣтахъ, но съ основательными познаніями, онъ, по примѣру всѣхъ почти Греческихъ ученыхъ мужей, путешествовалъ въ Египетъ, бывшій тогда хранилищемъ наукъ и успѣховъ разума человѣческаго. Неизвѣстно какія Архимедъ приобрѣлъ тамъ свѣдѣнія: покрайней мѣрѣ съ своей стороны онъ оставилъ Египтянамъ памятникъ своего посѣщенія, извѣстный щурупъ, коимъ они послѣ того нерѣдко пользовались для напоенія полей, при разлитіяхъ Нила не покрывавшихся водою. Посѣтивъ нѣкото-

рыя другїя страны, Архимедъ возвратился въ отечество, гдѣ вскорѣ прославился творческимъ своимъ умомъ, глубочайшими познанїями и пламенною любовїю къ наукамъ. Сїя любовь въ послѣдствїи превратилась въ совершенную страсть: онъ забывалъ пищу и питїе, о которыхъ приближенные должны были часто напоминать; и даже, когда бывалъ по убѣжденїю ихъ въ банѣ или купальнѣ, дѣлалъ фигуры на золѣ либо на своемъ тѣлѣ, умащенномъ по тогдашнему обыкновенїю благовонїями. Подобныя обстоятельсшва были Архимеду поводомъ къ разрѣшенїю вопроса, который есть основанїе Гидростатики. Іеронъ Царь Сиракузскїй, приказалъ сдѣлать для себя корону изъ чистаго золота: но художникъ, какъ казалось или можетъ быть донесли Государю, утаивъ часть золота, положилъ на мѣсто оной серебро;

почему Іеронъ и просилъ Архимеда (который ему былъ другъ и родственникъ), не можно ли открыть обмана. Архимедъ будучи въ ваннѣ разсуждалъ, что какъ его тѣло погружаясь въ воду дѣлается легче, такъ должны дѣлаться легче и всѣ вещи; а отсюда заключилъ, что изъ потери въ водѣ вѣса опредѣленнаго количества золота, серебра и вещи изъ смѣшенія ихъ сдѣланной, можно посредствомъ пропорцій вычислить количество сихъ металловъ въ таковой вещи. Основываясь на семъ онъ нашелъ, что въ золотой коронѣ дѣйствительно было примѣшано серебро, и притомъ какое именно количество; а признаніе художника подтвердило его вычисленіе.

Здѣсь да позволятъ мнѣ замѣтить, что мнѣніе, якобы важнѣйшія открытія сдѣланы случайно, принимаемое въ неограниченномъ смыслѣ есть не-

справедливо. Всегда было извѣстно, что тѣла погружаемыя въ жидкость дѣлаются легче; но токмо Архимедъ постигнулъ, какое слѣдствіе изъ сего вывести можно: всегда было извѣстно, что тѣла падаютъ на землю; но токмо Невтонъ могъ изъ паденія яблока открыть важнѣйшій законъ природы.

Объемля умомъ своимъ всѣ главныя отрасли Маѳематическихъ наукъ, Архимедъ особенно занимался Геометріею и Механикою, и сдѣлалъ въ нихъ такія открытія, которыя дали ему рѣшительное преимущество предъ всѣми учеными мужами древности, приобрѣли ему славу мудрости не человѣческой, какъ говоритъ Плутархъ (1), но вдохновенной, и заставили современниковъ думать, что разумъ его почерпалъ истинны изъ исто-

---

(1) Въ жизнеописаніи Марцелла.

чника сверхъестественнаго (1). Изъ всѣхъ сихъ истиннъ самому Архимеду наиболѣе нравилась ѳеорема объ отношенїи шара къ цилиндру описанному (2); онъ былъ столько доволенъ ея изобрѣтенїемъ, что просилъ друзей и родственниковъ своихъ, дабы они, посмерти его, на его гробѣ изобразили сїи фигуры съ означенїемъ ихъ отношенїя.

Механика была до Архимеда не что иное какъ сборъ малаго числа правилъ и замѣчанїй, неимѣвшихъ ни связи ни доказательствъ; онъ, такъ сказать, сотворилъ ее: открылъ ея главныя основанїя и далъ ей видъ науки. Между прочимъ онъ нашелъ и доказалъ, что всякою данною силою возможно приве-

(1) Говорили, будтобы онъ былъ вдохновенъ Сиреною, которая вмѣстѣ съ нимъ обитала. Плутархъ тамъ же.

(2) О шарѣ и цилиндрѣ Книг. 1. предл. 37.

сти въ движенїе всякую данную массу. Точность сего доказательства, какъ повѣствуютъ подала ему такую смѣлость, что увѣдомляя о семъ Царя Іерона, присовокупилъ: когдабы я имѣлъ другую землю и могъ на оную перейти, то бы нашу сдвинулъ съ мѣста. Удивленный Царь предложилъ ему доказать сїе правило какимъ либо возможнымъ опытомъ, то есть малою силою привести въ движенїе какое нибудь большое тѣло. Архимедъ взялъ для сего царскую галеру, которая съ большимъ трудомъ и помощїю многихъ рукъ вытащена была на берегъ, помѣстилъ на нее, кромѣ обыкновеннаго грузу, великое число людей, и одинъ безъ малѣйшаго сопротивленїя, двигая только рукою конецъ нѣкоторой многосложной махины, притащилъ къ себѣ судно, будучи въ весьма значительномъ разстоянїи, причемъ оно шло такъ лег-

ко, какъ бы плыло по морю. Царь, понявъ коль велика сила искуства и разума Архимеда, просилъ его устроить военныя махины, посредствомъ коихъ можно бы дѣйствовать какъ наступательно, такъ и оборонительно. Геометръ все сіе исполнилъ: но по щастію, или лучше сказать, по кроткому и мудрому правленію Іерона, махины оставались безъ употребленія во все время его царствованія, не смотря на бывшее тогда соперничество между двумя величайшими народами, Римлянами и Кареагенянами, ибо Государь Сиракузскій умѣлъ заставить и тѣхъ и другихъ уважать себя.

По смерти Іерона, вступилъ на Сиракузскій престолъ внукъ его Іеронимъ, который забывъ примѣръ своего дѣда, началъ царствованіе свое, по выраженію Грековъ, какъ тиранъ. Сиракузяне по прошествіи нѣсколь-

кихъ мѣсяцовъ взбунтовались, и Іеронимъ былъ свергнутъ съ престола. Въ сїе время борьба между Римлянами и Карѳагенянами принимала видъ весьма важный, какъ для нихъ самихъ, такъ и для сосѣдственныхъ народовъ: посему Иппократъ, военачальникъ Сиракузскїй, будучи родомъ Карѳагенецъ, принялъ явно сторону своихъ соотечественниковъ; а Римскїй Сенатъ за сїе объявилъ Сиракузянамъ войну.

Вскорѣ послѣ того прибылъ въ Сицилїю Консулъ Марцеллъ, и осадилъ Саракузы съ сухаго пути и съ моря. Мы небудемъ здѣсь входить въ подробности сей осады, одной впрочемъ изъ славнѣйшихъ въ бытописанїяхъ народовъ, какъ предмѣта сюда непосредственно не относящагося. Скажемъ только, что въ продолженїи восьми мѣсяцовъ тщетно мужественные Римляне истощили всѣ военныя хитро-

сти и испытывали всѣ роды нападенiй, кромѣ приступа; Архимедъ посредствомъ своихъ махинъ, всѣ ихъ предпрiятiя обращалъ въ ничто: встрѣчалъ ихъ въ необыкновенномъ разстоянiи бревнами, тучами стрѣлъ и копiй, тысячами камней и свинцовыхъ массъ, вѣсившихъ иногда до десяти талантовъ (1); опрокидывалъ, выбрасывалъ на берегъ или разбивалъ о камни, подъ стѣнами города находившiяся, суда ихъ; низпровергалъ или рузрушалъ осадныя ихъ махины: и каждый разъ заставлялъ ихъ искать спасенiя въ отступленiи или въ бѣгствѣ. Наконецъ, неслыханнымъ дотолѣ, да и нынѣ мало постигаемымъ способомъ, именно зеркалами, зажегъ оставшiйся отъ прежнихъ пораженiй ихъ флотъ

---

(1) Греческiй островскiй (Insulanum) талантъ имѣлъ слишкомъ 3 пуда нашего вѣсу.

и превратилъ оный въ пепелъ (1) Римляне пришли въ величайшее смятенїе; казалось, говоритъ Плутархъ, что они сражались съ богами: ихъ воины трепетали отъ одного имени Архимеда, и были столько напуганы, что отъ показавшагось на стѣнѣ полѣна или куска веревки, предавались бѣгству. Въ толь трудныхъ обстоятельствахъ благоразумный Консулъ, несмѣя покуситься на послѣднее оставшееся средство, то есть на приступъ, собралъ совѣтъ Трибуновъ, и сходно съ положенїемъ онаго, рѣшился содержать городъ только въ облежанїи. Таково было дѣйствїе ума одного старика, безъ котораго Сиракузы пали бы при первомъ нападе-

(1) Сомнѣвающїеся въ дѣйствительности сего произшествїя, могутъ найти доказательства *возможности* и *событїю* онаго, въ Histoire des Mathématiques, par I. F. Montucla Tome I, page 232 — 235.

нїи республиканцовъ, бывшихъ слишкомъ достаточно для сего вооруженными.

Генїй Архимеда, разспространивъ ужасъ въ Римскомъ войскѣ, произвелъ въ тоже время въ осажденныхъ его соотечественникахъ такую безпечность, которая неминуемо должна была погубить ихъ. Когда наступилъ праздникъ Артемиды (Дїаны), который у Сиракузянъ былъ днемъ увеселенїй, то они всѣ, не изключая и охранной стражи, безъзаботно предались забавамъ, и въ помышленїи не имѣя, что празднуютъ послѣднїй день независимости, а многїе и послѣднїй день жизни. Римляне узнали сїе, приближились къ стѣнамъ, отъ которыхъ доселѣ были въ почтительномъ разстоянїи, проломили ворота, и вошли въ городъ съ неистовствомъ раздраженныхъ побѣдителей. Еще до вступленїя, Марцеллъ по всей армїи

приказалъ, щадить Архимеда и не дѣлать ему ни малѣйшаго оскорбленія; но судьба опредѣлила иначе. Онъ былъ убитъ (за 212 л. до Р. Х.) солдатомъ, нашедшимъ его углубленнаго надъ какими то фигурами, и не знавшимъ, что это Архимедъ. Такъ кончилъ жизнь сей чрезвычайный человѣкъ, предъ которымъ и до нынѣ ни одинъ изъ Геометровъ не имѣлъ преимущества, и котораго даже самъ Невтонъ назвалъ Владыкою (Princeps) Маѳематиковъ.

Великодушный Марцеллъ весьма огорчился смертію своего противника. Отыскавъ родственниковъ его, онъ оказалъ имъ отличное уваженіе, и принялъ ихъ подъ особенное свое покровительство; тѣло Архимеда приказалъ погребсти великолѣпно, и на памятникѣ вырѣзать шаръ и описанный цилиндръ съ означеніемъ ихъ отношенія.

Спустя 137 лѣтъ, Цицеронъ, бу-

дучи Квесшеромъ въ Сициліи, опыскалъ сей памяшникъ, кошорый къ удивленію его, Сиракузяне въ продолженіи столь малаго времени почши забыли, и даже полагали, что оный болѣе не существовалъ (1).

Творенія Архимеда всѣ почши сохранены и дошли до насъ. Оныя сушь: *о Шарѣ и Цилиндрѣ; Измѣреніе круга; о Коноидахъ и Сфероидахъ; Объ Улишкахъ или завишкахъ; о Равновѣсіи плоскосшей; о Квадрашурѣ параболы; Аренарій; о Тѣлахъ погруженныхъ въ жидкосшь*, и наконецъ, *Леммы.* Послѣднія два найдены до нынѣ шокмо въ переводахъ на Арабскомъ языкѣ; всѣ же прочія сохранены и изданы въ подлинникѣ, писанныя чисшымъ и при-

(1) Нѣкошорые изъ новѣйшихъ пушешесшвенниковъ увѣряюшъ, что, основываясь на изусшныхъ преданіяхъ, еще и нынѣ въ Сиракузахъ показываюшъ шо мѣсшо, гдѣ сшоялъ домъ Архимеда, и шу башню, изъ кошорой онъ зажегъ Римскій флошъ.

ятнымъ слогомъ на Дорическомъ нарѣчіи (1). Большую часть оныхъ Архимедъ сообщалъ на разсмотрѣніе и какъ бы посвящалъ друзьямъ своимъ: Конону, коего смерть оплакивалъ съ чувствомъ искреннѣйшаго участія, а потомъ Досиѳею. Что же касается до махинъ, то почти всѣ онѣ для насъ потеряны, ибо Архимедъ изобрѣвъ оныя или для Геометрической забавы или по просьбѣ, и потому не полагая въ нихъ ни важности ни славы, къ сожалѣнію, не считалъ стоющими описанія. Изъ сего правила исключилъ онъ только шаръ, представляющій движеніе небесныхъ тѣлъ, но описаніе онаго не дошло до насъ. Сію махину почитали въ древности за нѣчто чудесное, превышающее всякое удивле-

(1) Въ книгахъ о Шарѣ и Цилиндрѣ и въ Измѣреніи круга встрѣчаются не рѣдко выраженія Аттическія. Торелли небезъ основанія полагаетъ, что оныя введены переписчиками.

нїе. Многїе Стихотворцы воспѣвали оную; въ числѣ ихъ замѣчателенъ извѣстный Клавдїанъ, который начинаетъ сими стихами:

Iupiter, in parvo cùm cerneret æthera vitro,
Risit, et ad superos talia verba dedit:
Huccine mortalis pogressa potentia curæ;
Ecce Syracusii ludimur arte senis.

Цицеронъ также съ удивленїемъ упоминаетъ о семъ изобрѣтенїи, и говоритъ, что оно изъ числа таковыхъ, кои наиболѣе дѣлаютъ честь разуму человѣческому. Но все сїе не можетъ замѣнить потери самаго описанїя.

Издаваемая теперь въ первый разъ на Россїйскомъ языкѣ (1) часть тво-

---

(1) Книга: *Архимедовы теоремы, Андреемъ Такветомъ выбранныя, и Георгїемъ Петромъ Домкїно, сокращенныя, съ Латїнскаго на Россїйскїй языкъ Хїрургусомъ Іваномъ Сатаровымъ преложенныя* 1745 *лѣта*, не можетъ назваться переводомъ Измѣренїя круга и Книгъ о шарѣ и цилиндрѣ; какъ отчасти видно и изъ самаго ея заглавїя.

ренїй Архимеда переведена мною (1) въ дополненїе къ восьми книгамъ Эвклидовыхъ Началъ (2), дабы такимъ образомъ составить курсъ Геометрїи, изложенной по способу древнихъ. Говоря въ точности, таковымъ дополненїемъ должно счесть токмо первую книгу о Шарѣ и Цилиндрѣ: но по связи и сходству предмѣтовъ я не могъ остальнаго отдѣлить; тѣмъ паче, что при обоихъ переводахъ главною цѣлїю было, познакомить нашихъ Маѳематиковъ съ древними Геометрами, кои, не смотря на то что кругъ Маѳематическихъ наукъ сдѣлался нынѣ обширнѣе, все еще остаются нашими образцами, какъ по выбору предмѣтовъ, такъ и по ясному и точному изложенїю оныхъ.

---

(1) Изъ изданїя Торелли подъ заглавїемъ: *Ἀρχιμήδους τὰ σωζόμενα.* Archimedis quae supersunt omnia. Oxoniae. 1792.

(2) Эвклидовыхъ Началъ восемь книгъ, содержащїя въ себѣ основанїя Геометрїи. 1819.

Впрочемъ, въ творенїяхъ Архимеда встрѣчаются мѣста и промежутки, требующїя нѣкоторыхъ поясненїй и пополненїй. Его необыкновенный разумъ нерѣдко видитъ связь истиннъ тамъ, гдѣ оная для обыкновенныхъ людей невидима, особливо съ перваго взгляду; иногда выводитъ слѣдствїя изъ такихъ предложенїй, которыя не всякому знать или помнить можно: но говоря вообще, онъ легокъ, ибо всегда точенъ, покрайней мѣрѣ гораздо легче, нежели объ немъ думаютъ; и естьли встрѣчаются какїя либо трудности, то оныя или сопряжены съ свойствомъ предметовъ, или проистекаютъ отъ малаго нашего знанїя древней ѳеорїи величинъ пропорцїональныхъ. Какъ бы то нибыло, но по выше сказаннымъ причинамъ, нѣкоторыя мѣста слѣдовало пополнить и пояснить, что мною и учинено въ помѣщенныхъ на концѣ сей

книги примѣчанїяхъ, кои заимствованы большею частїю изъ древняго нѣкоторыхъ Архимедовыхъ творенїй толкователя Эвтокїя.

Что касается до самаго перевода, то я держался того же правила, что при изданїи Эвклида, то есть предпочиталъ всегда точное и самое близкое сходство съ подлинникомъ, красотѣ слога и внѣшней изъящности выраженїй. Можетъ быть инымъ покажется, что полезно было бы ввести сократительные знаки, а особливо пропорцїй: но я, принявъ однажды за правило не отступать отъ подлинника, не хотѣлъ здѣлать таковой перемѣны, и притомъ думаю, что въ простомъ изложенїи истиннъ, какъ въ Геометрїи, гдѣ все состоитъ въ однихъ разсужденїяхъ а не въ изчисленїяхъ, безъ таковыхъ знаковъ всегда обходиться можно и даже полезно.

АРХИМЕДА О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ.

КНИГА I.

Архимедъ Досиѳея привѣтствуетъ! Не задолго предъ симъ я препроводилъ къ тебѣ нѣкоторые предмѣты моихъ изслѣдываній вмѣстѣ съ найденными мною доказательствами, въ томъ числѣ и слѣдующую ѳеорему: Всякій отрѣзокъ, содержимый въ прямой и въ сѣченіи прямоугольнаго конуса (1), равенъ четыремъ третямъ треугольника, имѣющаго съ отрѣзкомъ тоже основаніе и туже высоту.

Нынѣ я кончилъ и другія нѣкоторыя мнѣ на мысль пришедшія ѳеоремы, изъ коихъ достопримѣчательнѣйшія суть сіи: Поверхность шара есть четырекратная наибольшаго его круга. — Поверхность шароваго (сферическаго) отрѣзка равна

кругу, коего радіусъ (2) равенъ прямой, проведенной отъ вершины до окружности основанія отрѣзка (3). — Цилиндръ, имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту равную поперечнику онаго, есть полуторный (4) шара: И его поверхность есть полуторная же поверхности шара. Свойства сіи безъсомнѣнія существовали въ сказанныхъ фигурахъ, но доселѣ не были еще замѣчены ни кѣмъ изъ занимавшихся Геометріею: въ справедливости же оныхъ легко убѣдишься всякому, кто со вниманіемъ сличитъ ѳеоремы съ предложенными мною на оныя доказательствами (5). Такимъ образомъ и Эвдоксій собственнымъ разсужденіемъ открылъ многое о тѣлахъ, на примѣръ: что всякая пирамида есть треть призмы, имѣющей съ пирамидою тоже основаніе и туже высоту; что всякій конусъ есть треть цилиндра, имѣющаго съ конусомъ тоже основаніе и туже высоту: свойства, всегда существовавшія въ сихъ фигурахъ, но которыя, несмотря на то, что до Эвдоксія были многіе Геометры не недостойные вниманія, оставались для всѣхъ не извѣстными, и ни кѣмъ не были замѣчены.

Впрочемъ, оставляя все сіе на уваженіе людей, могущихъ судить о таковыхъ вещахъ, я съ моей стороны желалъ бы выдать въ свѣтъ сіе сочиненіе, при жизни еще Конона, который весьма могъ вникнуть въ оное, и назначить всему настоящую цѣну. Какъ бы то ни было, полагая что и другимъ занимающимся Маѳематическими науками не безполезно будетъ знать мои ѳеоремы, я посылаю оныя къ тебѣ съ надлежащими доказательствами, дабы знающіе сей предметъ, разсмотрѣли оныя. Прощай.

Здѣсь первѣе излагаются опредѣленія (6) и положенія, нужныя для доказательства ѳеоремъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ (6).

1. Кривыя линіи (7), оканчивающіяся на плоскости, суть тѣ, которыя вразсужденіи прямыхъ, концы ихъ соединяющихъ, суть или совсѣмъ по туже сторону, или нисколько по другую не падаютъ (8).

2. Изъ сего рода линій, вогнутою съ тойже стороны называю ту, на которой чрезъ взятыя какія нибудь двѣ

точки протягиваемыя прямыя падаютъ или всѣ по оную сторону, или токмо нѣкоторыя, а другія по самой кривой, но ни которая по другую не падаетъ (9).

3. Подобнымъ образомъ, поверхности оканчивающіяся на плоскости суть тѣ, которыя, будучи не на плоскости, имѣютъ края свои на ней, и вразсужденіи сей плоскости или находятся совсѣмъ по одну ея сторону, или нисколько по другую не падаютъ.

4. Изъ сего рода поверхностей, вогнутыми называю тѣ, на коихъ чрезъ взятыя какія ниесть двѣ точки протягиваемыя прямыя падаютъ или всѣ по оную сторону, или токмо нѣкоторыя, а другія по самимъ поверхностямъ, но ни которая по другую не падаетъ (10).

5. Вырѣзкомъ тѣлеснымъ называю фигуру, содержимую въ поверхности конуса, когда онъ пересѣкаетъ шаръ имѣя вершину при центрѣ онаго, и въ поверхности шара отнимаемой конусомъ (11).

6. А тѣлеснымъ ромбомъ называю тѣло, составленное изъ двухъ конусовъ, имѣющихъ тоже основаніе, а вершины съ различныхъ сторонъ плоскости основанія, такъ что ихъ оси лежатъ впрямь (12).

Я принимаю слѣдующія

ПОЛОЖЕНІЯ или НАЧАЛА (13):

1. Изъ линій, тѣже концы имѣющихъ, прямая есть наименьшая (14).

2. Изъ другихъ же линій, находящіяся на одной плоскости и имѣющія тѣже концы, суть неравныя, которыя вогнуты съ тойже стороны; и когда одна изъ нихъ, или вся объемлется другою и прямою тѣже съ нею концы имѣющею, или токмо объемлется нѣкоторою частію, имѣя остальную часть общую: то объемлемая есть меньшая.

3. Подобно, изъ поверхностей тѣже края имѣющихъ, естьли края находятся на плоскости, меньшая есть плоскость.

4. Изъ другихъ же поверхностей, имѣющія тѣже края и на одной плоскости, суть неравныя, которыя вогнуты съ той же стороны; и когда одна изъ нихъ, или вся объемлется другою и плоскостію тѣже съ нею края имѣющею, или токмо объемлется нѣкоторою частію, имѣя остальную часть общую: то обемлемая есть меньшая.

5. Изъ неравныхъ линій, неравныхъ по-

верхностей, или неравныхъ тѣлъ, есть-ли избытокъ большаго предъ меньшимъ, будетъ совокупляемъ самъ съ собою, то онъ можетъ превзойти всякую предложенную величину изъ рода тѣхъ, кои взаимно сравниваются (15).

Предположивъ все сіе, поступимъ далѣе.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели въ кругѣ вписанъ многоугольникъ; то явно, что очертаніе вписаннаго многоугольника меньше окружности круга. Ибо каждая сторона многоугольника меньше отнимаемой ею дуги круга†.

†пол. 1.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели около круга описанъ многоугольникъ; то очертаніе многоугольника описаннаго больше окружности круга.

Пусть будетъ описанъ около круга многоугольникъ, какъ предполагается. Говорю, что очертаніе многоугольника больше окружности круга.

Поелику прямыя BA, AL (16) больше дуги BL†, ибо имѣя тѣже концы объемлютъ дугу; подобно и прямыя DC, CB больше дуги DB; и LK, KH больше LH, и FG, GH больше FH, и наконецъ DE,

†пол. 2.

EF больше DF: посему и цѣлое очертаніе многоугольника больше окружности круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ, возможно найти двѣ прямыя неравныя такія, чтобы большая прямая къ меньшей имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей.

Пусть будутъ двѣ неравныя величины AB, D, и пусть AB будетъ большая. Говорю, что возможно найти двѣ неравныя прямыя, удовлетворяющія сказанному условію.

Положи величину BC равную D*, и изложи какую ни есть прямую FG. Итакъ величина AC, взятая кратно, превзойдетъ величину D†. Возьми таковую кратную, и пусть она будетъ AH; и сколько кратная есть AH величины AC, пусть будетъ столько кратная прямая FG прямой GE. Посему какъ HA къ AC, такъ FG къ GE*; и преложеніемъ, какъ EG къ GF, такъ AC къ AH. И поелику AH больше. D, то есть величины CB, то CA къ AH имѣетъ меньшее отношеніе, не-

*3, 1.

† пол. 5.

*c, 1.

8, V. жели CA къ CB (17). Посему, совокупле-
h, V. ніемъ, EF къ FG имѣетъ меньшее отношеніе, нежели AB къ BC. Но BC равна D: посему EF къ FG имѣетъ меньшее
3 и 11, V. отношеніе, нежели AB къ D.

И такъ найдены двѣ неравныя прямыя, удовлетворяющія сказанному условію, то есть такія, что большая къ меньшей имѣетъ меньшее отношеніе, нежели данныя величины, большая къ меньшей.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ и кругу, возможно въ кругѣ вписать многоугольникъ, и около него описать другой, такіе, чтобы сторона многоугольника описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей.

Пусть будутъ даны величины A, B, и кругъ CDEF. Говорю, что возможно удовлетворить условію.

Сыщи двѣ прямыя H, KL, изъ коихъ H большая, такія, чтобъ H къ KL имѣла меньшее отношеніе, нежели большая вели-
+3. чина къ меньшей†; и отъ L проведи, подъ
11, I. прямыми углами къ LK, прямую LM; и

отъ K помѣсти прямую KM равную H, ибо сіе возможно (18); и проведи два взаимно перпендикулярные поперечники CE, DF. Теперь естьли уголъ DGE раздѣлимъ по поламъ, и каждую половину еще по поламъ, и сіе всегда дѣлать будемъ; то напослѣдокъ останется нѣкій уголъ меншій, нежели двукратный уголъ LKM*. *1, X. Пусть останется, и пусть будетъ таковый уголъ NGC, и протяни NC. Итакъ NC есть сторона многоугольника равносторонняго. Ибо какъ уголъ NGC измѣряетъ прямый уголъ DGC, то и дуга NC измѣряетъ дугу CD, четверть окружности, слѣдственно измѣряетъ и цѣлую окружность; а посему явно, что прямая CN есть сторона многоугольника равносторонняго. Раздѣли уголъ NGC по поламъ прямою GO*; и проведи касательную къ кругу въ O прямую POQ; и продолжи прямыя GNQ, GCP. Слѣдственно QP есть сторона же многоугольника описаннаго около круга, равносторонняго и, какъ явствуетъ, подобнаго вписанному, коего сторона есть NC. И поелику уголъ NGC есть меньше, нежели двукратный уголъ LKM, то уголъ TGC меньше угла LKM; углы же при L, T суть прямые: *9, 1.

посему MK къ LK имѣетъ большее отношеніе, нежели CG къ GT (19). Но CG равна GO: слѣдственно* GO къ GT, то есть QP къ NC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели MK къ KL. Притомъ же KM къ KL имѣетъ меньшее отношеніе, нежели A къ B, (20) и QP есть сторона многоугольника описаннаго, а CN сторона вписаннаго (21). Что и найти предложено было.

*16, г.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели опять будутъ двѣ неравныя величины, и вырѣзокъ круга, то возможно описать многоугольникъ около сего вырѣзка, и въ немъ вписать другой, такіе, чтобы сторона описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей.

Пусть опять будутъ двѣ неравныя величины E, F, изъ коихъ E большая, и еще нѣкій кругъ ABC, имѣющій центръ въ D; и пусть при D будетъ составленъ вырѣзокъ ADB. Надлежитъ описать многоугольникъ около вырѣзка ABD, и въ немъ вписать другой, имѣющіе всѣ стороны, кромѣ BD, DA, взаимно равныя, такъ чтобы условіе было выполнено.

Сыщи двѣ прямыя G, НК неравныя, изъ коихъ ~~НК~~ большая, такія, чтобы G къ НК имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей, что возможно[†]; и изъ точки К проведя, какъ и † 3.
прежде, подъ прямыми углами къ НК прямую KL, помѣсти HL равную G, что такожъ возможно, ибо G больше НК. Теперь, естьли раздѣлимъ уголъ ADB по поламъ, его половину еще по поламъ, и такъ далѣе, то напослѣдокъ останется нѣкій уголъ меньшій, нежели двукратный уголъ LHK. Пусть останется таковый уголъ ADM: посему AM будетъ сторона многоугольника вписаннаго въ вырѣзкѣ. И естьли уголъ ADM раздѣлимъ по поламъ прямою DN, и чрезъ N проведемъ касательную къ вырѣзку прямую ONP; то она будетъ сторона многоугольника, около сего вырѣзка описаннаго, подобнаго помянутому многоугольнику: а, въ силу сказаннаго предъ симъ, OP къ AM будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели величина E къ величинѣ F.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

По данному кругу и двумъ неравнымъ величинамъ, описать многоугольникъ око-

ло сего круга и въ немъ вписать другой, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей.

Изложи кругъ A и двѣ неравныя величины E, F, изъ коихъ E большая. Надлежитъ описать многоугольникъ около сего круга и въ немъ вписать другой, такіе, чтобы удовлетворяли условію.

Беру двѣ прямыя C, D, изъ коихъ C
большая, такія, чтобы C къ D имѣла
+3. меньшее отношеніе, нежели E къ F+, и
прямымъ C, D среднюю пропорціональ-
ную G: посему E больше G. И пусть
будетъ описанъ многоугольникъ около кру-
га и въ немъ вписанъ другой, по сказан-
+4. ному предъ симъ+, такіе, чтобы сторона
многоугольника описаннаго къ сторонѣ
вписаннаго имѣла меньшее отношеніе,
нежели C къ G: посему и удвоенное отно-
сл: q, r. шеніе будетъ меньше удвоеннаго. Но
удвоенное отношеніе стороны къ сто-
ронѣ есть отношеніе многоугольника къ
многоугольнику, ибо они подобны; а удво-
енное прямыя C къ G есть отношеніе
C къ D: посему и многоугольникъ описан-
ный къ вписанному имѣетъ меньшее отно-
шеніе, нежели C къ D; а посему описан-

ный къ вписанному тѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели E къ F.

Подобно же докажемъ, что по даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ и вырѣзку круга, возможно описать многоугольникъ около вырѣзка и въ немъ вписать другой, подобный первому, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей.

Явствуетъ еще, что ежели даны кругъ или вырѣзокъ и нѣкое пространство, то возможно, вписывая въ семъ кругѣ или въ семъ вырѣзкѣ, а потомъ въ оставшихся отрѣзкахъ, многоугольники равносторонные, получить напослѣдокъ такіе остающіеся отрѣзки круга или вырѣзка, кои будутъ меньше даннаго пространства, какъ показано уже въ Началахъ*. *въ 2, XII.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Мы же докажемъ, что по данному кругу или вырѣзку, и пространству, возможно описать около сего круга или вырѣзка многоугольникъ такой, чтобы остающіеся его отрѣзки были меньше даннаго пространства. Мнѣ дозволено будетъ то,

что докажу о кругѣ, отнести, по сходству причинъ, и къ вырѣзку.

Пусть будутъ даны кругъ А и нѣкое пространство В. Около сего круга возможно описать многоугольникъ такой, что оставшіеся его отрѣзки, кои между кругомъ и многоугольникомъ, будутъ меньше поверхности В.

Поелику суть двѣ неравныя величины; большая, пространство В купно съ кругомъ А, а меньшая сей кругъ; то опиши многоугольникъ около круга А и въ немъ впиши другой, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели большая изъ сказанныхъ величинъ къ меньшей. Сей описанный многоугольникъ будетъ тотъ самый, коего отрѣзки, облежащіе кругъ, суть меньше даннаго пространства В.

И дѣйствительно, поелику описанный къ вписанному имѣетъ меньшее отношеніе, нежели пространство В купно съ кругомъ къ тому же кругу; и кругъ больше многоугольника вписаннаго (22): то тѣмъ паче описанный къ кругу А имѣетъ меньшее отношеніе, нежели пространство В купно съ кругомъ А къ сему же кругу. Посему, отдѣленіемъ, остальные отрѣзки

многоугольника описаннаго къ кругу А имѣютъ меньшее отношеніе, нежели пространство В къ кругу А*. Чего ради отрѣзки многоугольника описаннаго суть меньше пространства В*. *к, Г. *. с, Г.

Или и такъ. Поелику описанный къ кругу имѣетъ меньшее отношеніе, нежели пространство В купно съ кругомъ А къ сему же кругу; то многоугольникъ описанный меньше пространства В купно съ кругомъ А: посему остальные отрѣзки, облежащіе кругъ, суть меньше пространства В.

Подобно же докажется и о вырѣзкахъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели въ прямомъ конусѣ впишется пирамида, имѣющая основаніе равностороннее; то поверхность ея, кромѣ основанія, равна треугольнику, имѣющему основаніе равное очертанію основанія пирамиды, а высоту равную перпендикуляру, отъ вершины къ одной изъ сторонъ основанія проведенному.

Пусть будетъ прямый конусъ, коего основаніе кругъ АВС; и пусть будетъ въ немъ вписана пирамида, имѣющая

основанiемъ равносторонный треугольникъ ABC. Говорю, что поверхность ея, кромѣ основанiя, равна сказанному треугольнику.

Поелику конусъ есть прямый, и основанiе пирамиды равностороннее; то высоты треугольниковъ, содержащихъ пи-
1, VI и 6, V. рамиду, суть взаимно равныя. Сiи же треугольники стоятъ на равныхъ основанiяхъ AB, BC, CA, и имѣютъ помянутую высоту: слѣдственно сiи всѣ треугольники равны треугольнику, имѣющему основанiе равное прямымъ AB, BC, CA, и помянутую высоту, то есть, ему равна поверхность пирамиды, кромѣ треугольника ABC.

Другое доказательство еще яснѣе.

Пусть будетъ прямый конусъ, коего основанiе кругъ ABC, а вершина точка D; и пусть будетъ вписана въ семъ конусѣ пирамида, имѣющая основанiемъ равносторонный треугольникъ ABC; и протяни DA, DC, DB. Говорю, что треугольники ADB, ADC, BDC равны треугольнику, коего основанiе равно очертанiю треугольника ABC, а перпендикуляръ, отъ вершины къ основанiю проведенный,

равенъ перпендикуляру, проведенному отъ D къ BC.

Проведи перпендикуляры DK, DL, DM, то оные будутъ взаимно равны; и изложи треугольникъ EFG, имѣющій основаніе равное очертанію треугольника ABC, а высоту GH равную DL. Поелику прямоугольникъ въ BC, DK есть двукратный треугольника DBC, а въ AB, DL двукратный треугольника ABD, и въ AC, DM двукратный треугольника ADC: то прямоугольникъ содержимый въ очертаніи треугольника ABC, то есть въ EF, и въ прямой DL, то есть GH, есть двукратный всѣхъ треугольниковъ ADB, BDC, ADC. Но прямоугольникъ въ EF, GH есть двукратный и треугольника EFG; посему треугольникъ EFG равенъ треугольникамъ ADB, BDC, ADC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели около прямаго конуса опишется пирамида; то поверхность сей пирамиды, кромѣ основанія, равна треугольнику, имѣющему основаніе равное очертанію ея основанія, а высоту равную сторонѣ конуса.

Пусть будетъ конусъ, коего основаніе кругъ ABC; и пусть описана будетъ около сего конуса пирамида, такъ чтобы ея основаніе, то есть многоугольникъ DEF былъ описанный около круга ABC. Говорю, что поверхность пирамиды, кромѣ основанія, равна помянутому треугольнику.

Поелику ось конуса перпендикулярна къ основанію, то есть къ кругу ABC; и прямыя проводимыя отъ центра къ прикосновеніямъ перпендикулярны къ касательнымъ: то и проведенныя отъ вершины конуса къ прикосновеніямъ, будутъ перпендикулярны къ DE, FE, FD (23). Итакъ помянутые перпендикуляры GA, GB, GC взаимно равны, ибо суть стороны конуса. Теперь изложи треугольникъ HKL, имѣющій основаніе HK равное очертанію треугольника DEF, а высоту LM равную GA. И поелику прямоугольникъ въ DE, AG есть двукратный треугольника EDG; а въ DF, GB двукратный треугольника DFG; и въ EF, CG двукратный треугольника EGF: то прямоугольникъ въ HK, AG, то есть ML, есть двукратный всѣхъ треугольниковъ EDG, FDG, EGF. Но прямоугольникъ въ HK, ML есть двукратный

и треугольника LKH: слѣдственно поверхность пирамиды, кромѣ основанія, равна треугольнику, имѣющему основаніе равное очертанію треугольника DEF, а высоту равную сторонѣ конуса.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Естьли въ кругѣ, который есть основаніе прямаго конуса, помѣстится прямая линія; и отъ концовъ ея до вершины конуса протянутся прямыя линіи: то треугольникъ, составившійся изъ прямыхъ, помѣщенной и протянутыхъ до вершины, будетъ меньше поверхности конуса, которая между протянутыми до вершины.

Пусть будетъ прямаго конуса основаніе кругъ ABC, а вершина точка D; и пусть помѣстится въ немъ нѣкая прямая AC, и отъ вершины до A, C протянутся AD, DC. Говорю, что треугольникъ ADC есть меньше конической поверхности, что между AD, DC.

Раздѣли дугу ABC по поламъ въ B, и протяни AB, CB, DB: то треугольники ABD, BCD будутъ больше треугольника ADC (24). Пусть избытокъ помянутыхъ

треугольниковъ предъ треугольникомъ ADC будетъ пространство H. Итакъ H или меньше отрѣзковъ AB, BC, или не меньше.

Пусть, вопервыхъ, будетъ не меньше. И поелику имѣются двѣ поверхности, одна коническая, что между AD, DB, купно съ отрѣзкомъ AEB, а другая треугольникъ ADB; и обѣ окраеваются или сопредѣльны на очертаніи треугольника ADB: то объемлющая больше объемлемой. Посему коническая поверхность, что между AD, DB, купно съ отрѣзкомъ AEB, есть больше треугольника ABD. Подобно и поверхность, что между BD, DC, купно съ отрѣзкомъ CFB, больше треугольника BDC (25). Чего ради и цѣлая коническая поверхность, что между AD, DC, купно съ пространствомъ H, есть больше сказанныхъ треугольниковъ. Сказанные же треугольники равны треугольнику ADC съ пространствомъ H: слѣдственно, по отнятіи общаго пространства H, остальная коническая поверхность, что между AD, DC, будетъ больше треугольника ADC.

Но пусть H будетъ меньше отрѣзковъ AB, BC. Естьли раздѣлимъ дуги AB, BC

по поламъ, а половины ихъ еще по поламъ, «и сіе всегда дѣлать будемъ»; то напослѣдокъ останутся отрѣзки круга, кои будутъ меньше пространства Н. Пусть таковые останутся, и будутъ тѣ, кои на AE, EB, BF, CF; и протяни DE, DF. Опять, по предъидущему, поверхность конуса, которая между AD, DE, купно съ отрѣзкомъ что на AE, есть больше треугольника ADE; а которая между ED, DB, купно съ отрѣзкомъ что на EB, больше треугольника EDB. Посему поверхность что между AD, DB, купно съ отрѣзками AE, EB, есть больше треугольниковъ ADE, EBD. И поелику треугольники AED, DEB больше треугольника ABD, какъ уже доказано; то тѣмъ паче поверхность конуса, которая между AD, DB, купно съ отрѣзками, что на AE, EB, есть больше треугольника ADB. Потому же и поверхность между BD, DC, купно съ отрѣзками на BF, FC, больше треугольника BDC. Чего ради цѣлая поверхность, которая между AD, DC, купно со всѣми сказанными отрѣзками, есть больше треугольниковъ ABD, DBC. Но сіи треугольники равны треугольнику ADC купно съ пространствомъ Н; а всѣ ска-

занные отрѣзки суть меньше пространства Н: слѣдственно остальная поверхность что между AD, DC есть больше треугольника ADC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Ежели къ кругу, который есть основаніе прямаго конуса, будутъ проведены касательныя, лежащія на тойже плоскости что и кругъ и взаимно встрѣчающіяся; и естьли отъ точекъ касанія и встрѣчи, протянуты будутъ до вершины конуса прямыя: то треугольники, содержимые въ касательныхъ и въ прямыхъ протянутыхъ до вершины конуса, будутъ больше поверхности конуса, ими отнимаемой.

Пусть будетъ конусъ, коего основаніе кругъ ABC, а вершина точка E; и пусть будутъ проведены касательныя къ кругу ABC прямыя AD, DC, лежащія на тойже съ нимъ плоскости; и отъ точки E, которая есть вершина конуса, до точекъ A, D, C пусть будутъ протянуты EA, ED, EC. Говорю, что треугольники ADE, DEC суть больше конической поверхности, которая между прямыми AE, CE и дугою ABC.

Проведи прямую GBF касательную къ кругу и параллельную къ AC, раздѣливъ дугу ABC по поламъ въ B; и отъ G, F до E протяни GE, FE. Поелику GD, DF больше GF, придай обще GA, FC; посему и цѣлыя AD, DC суть больше прямыхъ AG, GF, FC. И поелику AE, EB, EC суть стороны прямаго конуса, то онѣ взаимно равны; онѣ же и перпендикулярны «къ касательнымъ», по доказанному въ леммѣ[+] (23). И потому прямоугольники въ перпендикулярахъ и въ основаніяхъ треугольниковъ AED, DEC содержимые, суть больше содержимыхъ въ перпендикулярахъ и въ основаніяхъ треугольниковъ AGE, GEF, FEC: ибо основанія AG, GF, FC ~~больше~~ основаній CD, DA; высоты же суть равныя (26), [поелику, какъ явно, прямая протянутая отъ вершины конуса до прикосновенія основаній, перпендикулярна къ касательной] (27). Пусть избытокъ треугольниковъ AED, DCE предъ треугольниками AEG, GEF, FEC будетъ пространство H. Итакъ H или меньше отрѣзковъ облежащихъ AGB, BFC, или не меньше.

+ въ 9.

Пусть, вопервыхъ, будетъ не меньше. Поелику имѣются двѣ сложныя поверх-

ности, одна пирамиды, имѣющей основаніе трапецію GACF а вершину точку E, а другая коническая между AE, EC, купно съ отрѣзкомъ ABC, и обѣ сопредѣльны на очертаніи треугольника AEC : то явствуетъ, что поверхность пирамиды, кромѣ треугольника AEC, больше конической поверхности, купно съ отрѣзкомъ
* пол. 4. ABC*. Отними общій отрѣзокъ ABC: посему остальные треугольники AGE, GEF, FEC, купно съ облежащими отрѣзками AGB, BFC, суть больше конической поверхности что между AE, EC. Но облежащихъ отрѣзковъ AGB, BFC не меньше есть пространство H: посему треугольники AGE, GEF, FEC, купно съ H, суть тѣмъ паче больше конической поверхности, что между AE, EC. А треугольники AGE, GEF, FEC, купно съ H, равны треугольникамъ AED, DEC : чего ради и треугольники AED, DEC суть больше сказанной конической поверхности.

Но пусть H будетъ меньше отрѣзковъ. Естьли будемъ описывать многоугольники около отрѣзковъ, раздѣляя дуги по поламъ, и проводя касательныя: то останутся напослѣдокъ нѣкіе отрѣзки, кои

всѣ будутъ меньше пространства H (28). Пусть таковые останутся; и пусть AMK, KNB, BOL, LPC будутъ тѣ отрѣзки, кои меньше пространства H: и протяни прямыя до E (29). Опять явно, что треугольники AGE, GEF, FEC больше треугольниковъ AEM, MEN, NEO, OEP, PEC: ибо основанія первыхъ больше основаній вторыхъ, а высоты всѣхъ суть одинакія. Равнымъ образомъ, опять поверхность пирамиды, имѣющей основаніемъ многоугольникъ AMNOPC, а вершину точку E, кромѣ треугольника AEC, есть больше конической поверхности что между AE, EC, купно съ отрѣзкомъ ABC. Отними общій отрѣзокъ ABC: посему остальные треугольники AEM, MEN, NEO, OEP, PEC, купно съ облежащими отрѣзками AMK, KNB, BOL, LPC, суть больше конической поверхности что между AE, EC. Но сказанныхъ облежащихъ отрѣзковъ больше есть пространство H; а такожъ и треугольниковъ AEM, MEN, NEO, OEP, PEC, по доказанному суть больше треугольники AEG, GEF, FEC: слѣдственно тѣмъ паче треугольники AEG, GEF, FEC, купно съ пространствомъ H, то есть треугольники ADE, DEC суть больше кони-

ческой поверхности, что между прямыми АЕ, ЕС.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Ежели на поверхности прямаго цилиндра проведутся двѣ прямыя линіи: то поверхность цилиндра, которая между сихъ прямыхъ, есть больше параллелограмма, содержимаго сими прямыми и соединяющими ихъ концы.

Пусть будетъ прямый цилиндръ, коего основаніе кругъ АВ, противулежащій кругу CD; и пусть будутъ проведены АС, BD (30). Говорю, что цилиндрическая поверхность, отнимаемая прямыми АС, BD, есть больше параллелограмма ACDB.

Раздѣли дуги АВ, CD по поламъ въ точкахъ Е, F; и протяни АЕ, ЕВ, CF, FD. Поелику АЕ, ЕВ больше АВ; и параллелограммы на нихъ стоящіе суть равновысотные: то параллелограммы, коихъ основанія АЕ, ЕВ, а высота таже что и цилиндра, суть больше параллелограмма ABCD. Пусть избытокъ однихъ предъ другимъ будетъ пространство G. Итакъ пространство G или меньше плоскихъ отрѣзковъ АЕ, ЕВ, CF, FD, или не меньше.

Пусть, вопервыхъ, будетъ не меньше. И поелику цилиндрическая поверхность, отнимаемая прямыми AC, BD, купно съ отрѣзками AEB, CFD, окраевается на плоскости параллелограмма ABDC; а и поверхность сложенная изъ параллелограмовъ, коихъ основанія AE, EB а высота таже что и цилиндра, купно съ треугольниками AEB, CFD, окраевается также на плоскости параллелограмма ABDC; и одна объемлетъ другую; и обѣ выпуклы съ тойже стороны: то цилиндрическая поверхность, прямыми AC, BD отнимаемая, купно съ плоскими отрѣзками AEB, CFD, есть больше поверхности, сложенной изъ параллелограмовъ, коихъ основанія AE, EB а высота таже что и цилиндра, и изъ треугольниковъ AEB, CFD+. Отними общіе треугольники AEB, CFD: посему остальная цилиндрическая поверхность, отнимаемая прямыми AC, BD, купно съ плоскими отрѣзками AE, EB, CF, FD, есть больше поверхности, сложенной изъ параллелограммовъ, коихъ основанія AE, EB, а высота таже что и цилиндра. Но параллелограммы, коихъ основанія AE, EB, а высота таже что и цилиндра, равны параллелограмму

+ пол. 4.

ACDB и пространству G (31): чего ради остальная цилиндрическая поверхность, отнимаемая прямыми AC, BD, есть больше параллелограмма ACDB.

Но пусть пространство G будетъ меньше плоскихъ отрѣзковъ AE, EB, CF, FD. Естьли каждую изъ дугъ AE, EB, CF, FD раздѣлимъ по поламъ въ точкахъ H, K, L, M, и протянемъ AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, то отнимутся треугольники AHE, EKB, CLF, FMD, кои не меньше половины плоскихъ отрѣзковъ AE, EB, CF, FD; и естьли сіе всегда дѣлать будемъ: то останутся напослѣдокъ нѣкіе отрѣзки, кои будутъ меньше пространства G. Пусть таковые останутся, и будутъ AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD: то подобно докажемъ, что параллелограммы, коихъ основанія AH, HE, EK, KB, а высота таже что и цилиндра, суть больше параллелограмовъ, коихъ основанія AE, EB, а высота таже что и цилиндра. И поелику цилиндрическая поверхность, отнимаемая прямыми AC, BD, купно съ плоскими отрѣзками AEB, CFD, имѣетъ края на плоскости параллелограмма, равно какъ и поверхность, сложенная изъ параллелограмовъ, коихъ осно-

ванія AH, HE, EK, KB, а высота таже что и цилиндра, и изъ фигуръ AHEKB, CLFMD: то, по отнятіи общихъ фигуръ AHEKB, CLFMD, остальная цилиндрическая поверхность, отнимаемая прямыми AC, BD, купно съ плоскими отрѣзками AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, будетъ больше поверхности, сложенной изъ параллелограммовъ, коихъ основанія AH, HE, EK, KB, а высота таже что и цилиндра. Но параллелограммы, коихъ основанія AH, HE, EK, KB, а высота таже что и цилиндра, больше параллелограммовъ, коихъ основанія AE, EB, а высота таже что и цилиндра: посему цилиндрическая поверхность отнимаемая прямыми AC, BD, купно съ плоскими отрѣзками AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, есть больше параллелограммовъ, коихъ основанія AE, EB, а высота таже что и цилиндра. Параллелограммы же, коихъ основанія AE, EB а высота таже что и цилиндра, равны параллелограмму ACDB и пространству G: посему цилиндрическая поверхность, отнимаемая прямыми AC, BD, купно съ плоскими отрѣзками AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, есть больше параллелограмма ACDB купно съ пространствомъ G.

Но отрѣзки AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD меньше пространства G: чего ради остальная цилиндрическая поверхность, отнимаемая прямыми AC, BD, есть больше параллелограмма ACDB.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели на поверхности какого ни есть прямаго цилиндра будутъ двѣ прямыя линіи; и чрезъ концы ихъ проведутся къ кругамъ, кои суть основанія цилиндра, касательныя, лежащія на тойже съ ними плоскости и взаимно встрѣчающіяся: то параллелограммы, содержимые касательными и сторонами цилиндра, будутъ больше поверхности цилиндра, отнимаемой прямыми, кои на его поверхности.

Пусть кругъ ABC будетъ основаніе какого ни есть прямаго цилиндра; и пусть на поверхности его будутъ двѣ прямыя линіи, коихъ концы A, C; и чрезъ A, C пусть проведены будутъ касательныя къ кругу ABC, находящіяся на тойже съ нимъ плоскости, кои взаимно встрѣчаются въ G. Вообразимъ и на другомъ основаніи цилиндра, чрезъ концы прямыхъ, кои на его поверхности, проведенныя

прямыя касательныя къ кругу. Надлежитъ доказать, что параллелограммы, содержимые въ касательныхъ и въ сторонахъ цилиндра, суть больше поверхности цилиндра, которая по дугѢ ABC. Проведи касательную къ кругу ABC прямую EF; и чрезъ точки E, F проведи параллельныя прямыя къ оси цилиндра, продолживъ оныя до плоскости другаго основанія. Итакъ параллелограммы, содержимые въ прямыхъ AG, GC и въ сторонахъ цилиндра, суть больше параллелограмовъ, содержимыхъ въ AE, EF, FC и въ сторонахъ же цилиндра: ибо EG, GF больше EF, придай обще AE, FC, посему цѢлыя GA, GC суть больше нежели AE, EF, FC. Пусть избытокъ однихъ параллелограммовъ предъ другими будетъ пространство K. Итакъ половина пространства K или больше фигуръ содержимыхъ въ прямыхъ AE, EF, FC и въ дугахъ AB, BC, или не больше.

Пусть, вопервыхъ, будетъ больше. Поелику же поверхность сложенная изъ параллелограммовъ что на AE, EF, FC, изъ трапеціи AEFC и изъ противулежащей ей на другомъ основаніи цилиндра, имѢетъ края на очертаніи параллело-

грамма стоящаго на AC; а и поверхности сложенной изъ цилиндрической что по ABC, изъ отрѣзка ABC и изъ противулежащаго ему, края суть на томъ же очертаніи: то помянутыя обѣ поверхности имѣютъ тѣже края и на одной плоскости. Онѣ же выпуклы съ тойже стороны; и одна изъ нихъ частію объемлется другою, а остальную часть имѣетъ общую: посему поверхность объемлемая есть меньшая*. И потому, отнявъ обще отрѣзокъ ABC и противулежащій, будетъ поверхность цилиндра что по дугѣ ABC, меньше поверхности сложенной изъ параллелограммовъ что на AE, EF, FC, изъ фигуръ AEB, BFC и изъ противулежащихъ имъ. Но поверхности помянутыхъ параллелограммовъ, купно съ сказанными фигурами, суть меньше поверхности сложенной изъ параллелограммовъ что на AG, GC; ибо первые, купно съ пространствомъ K, которое больше фигуръ, равны послѣднимъ: чего ради параллелограммы, содержимые въ прямыхъ AG, GC и въ сторонахъ цилиндра, суть больше поверхности цилиндра, что по дугѣ ABC.

* пол. 4.

Естьли же пространство K не больше

сказанныхъ фигуръ, то должно проводить касательныя къ кругу, пока получатся облежащія фигуры, кои меньше пространства K: и слѣдующее потомъ докажется какъ и прежде.

Доказавъ сіе, легко уже изъ прежде сказаннаго видѣть, что ежели въ прямомъ конусѣ впишется пирамида; то поверхность ея, кромѣ основанія, есть меньше конической поверхности. Ибо, какъ изъ треугольниковъ содержащихъ пирамиду, каждый меньше конической поверхности что между сторонъ треугольника: слѣдственно и цѣлая поверхность пирамиды, кромѣ основанія, будетъ меньше поверхности конуса, кромѣ основанія же.

А ежели около прямаго конуса опишется пирамида; то поверхность пирамиды, кромѣ основанія, будетъ больше поверхности конуса, также кромѣ основанія.

Еще же явствуетъ изъ преждедоказаннаго, что ежели въ прямомъ цилиндрѣ впишется призма; то поверхность призмы, сложенная изъ параллелограммовъ, есть меньше поверхности цилиндра, кромѣ основанія. Ибо каждый параллело-

граммъ призмы есть меньше поверхности цилиндра, которая на немъ.

А ежели около прямаго цилиндра опишется призма; то поверхность призмы, сложенная изъ параллелограммовъ, будетъ больше поверхности цилиндра, также кромѣ основанія.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Поверхность всякаго прямаго цилиндра, кромѣ основаній, равна кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между стороною цилиндра и поперечникомъ его основанія.

Пусть будетъ основаніе какого ниесть прямаго цилиндра кругъ A; и пусть будетъ равна поперечнику круга A прямая CD, а сторонѣ цилиндра прямая EF. Между DC, EF возьми среднюю пропорціональную G; и изложи кругъ B, коего радіусъ равенъ G. Надлежитъ доказать, что кругъ B равенъ поверхности цилиндра, кромѣ основаній.

Ибо естьли не равенъ, то или больше, или меньше.

Пусть вопервыхъ, будетъ, естьли возможно, меньше. И поелику суть двѣ

величины неравныя, поверхность цилиндра и кругъ B; то возможно вписать многоугольникъ равносторонный въ кругѣ B и около него описать другой, такіе, чтобъ описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели поверхность цилиндра къ кругу B†. Вообрази таковые многоугольники описанный и вписанный; и около круга A опиши многоугольникъ подобный описанному около круга B; и на томъ многоугольникѣ составь призму описанную около цилиндра; и пусть очертанію многоугольника описаннаго около круга A равна будетъ KD, а прямой KD равна LF; и пусть половина прямой CD будетъ CT. Итакъ треугольникъ KDT равенъ многоугольнику описанному около круга A; ибо основаніе имѣетъ равное очертанію многоугольника, а высоту равную радіусу круга A: а параллелограммъ EL равенъ поверхности призмы описанной около цилиндра; ибо содержится въ сторонѣ цилиндра и въ прямой, равной очертанію основанія призмы. Сдѣлай ER равную EF: посему треугольникъ FRL равенъ параллелограмму EL, слѣдовательно и поверхности призмы. И поелику многоугольники, опи- †6.

санные около круговъ A, B, подобны; то они суть взаимно какъ квадраты изъ радіусовъ: посему какъ треугольникъ KTD къ многоугольнику описанному около круга B, такъ квадратъ изъ TD къ квадрату изъ G, ибо TD, G равны радіусамъ круговъ. Но какъ квадратъ изъ TD къ
сл. 2, 20, VI. квадрату изъ G, такъ TD къ RF. Ибо G, будучи среднею пропорціональною между CD, EF, есть таковая же средняя между TD, RF; и вотъ почему? Поелику DT равна TC, а RE равна EF, то CD есть двукратная прямой TD, а RF прямой RE; посему какъ DC къ DT, такъ
с. V. RF къ FE; а посему прямоугольникъ въ CD, EF равенъ прямоугольнику въ TD,
16, VI. RF. Прямоугольнику же въ CD, EF ра-
17, VI. венъ квадратъ изъ G; посему и квадратъ изъ G равенъ прямоугольнику въ TD, RF: слѣдовательно какъ TD къ G, такъ G къ RF. Чего ради какъ квадратъ изъ TD къ квадрату изъ G, такъ TD къ RF: ибо, ежели три прямыя пропорціональны, то какъ первая къ третьей, такъ фигура изъ первой къ фигурѣ подобной и подобно написанной изъ второй. — А какъ TD къ RF, такъ треугольникъ KTD къ тре-
1, VI. угольнику RLF, ибо KD, LF взаимно рав-

ны. Посему* какъ треугольникъ KTD къ *11, V.
многоугольнику описанному около круга B, такъ треугольникъ KTD къ треугольнику RLF. Чего ради* треугольникъ FLR ра- *ς, V.
венъ многоугольнику описанному около круга B: а посему и поверхность призмы описанной около цилиндра, равна многоугольнику описанному около круга B. И поелику многоугольникъ описанный около круга B, къ вписанному въ семъ же кругѣ, имѣетъ меньшее отношеніе, нежели поверхность цилиндра A къ кругу B; то и поверхность призмы описанной около цилиндра, къ многоугольнику вписанному въ кругѣ B, имѣетъ меньшее отношеніе, нежели поверхность цилиндра къ кругу B;
также и премѣненіемъ*, что невозмож- *8, V.
но (32): ибо поверхность призмы описанной около цилиндра, по доказанному†, †13.
больше поверхности цилиндра, а многоугольникъ вписанный въ кругѣ B меньше
круга B†. Итакъ кругъ B не меньше по- †1.
верхности цилиндра.

Но пусть, естьли возможно, будетъ больше. Вообрази опять многоугольникъ вписанный въ кругѣ B и около него описанный другой, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отноше-

ніе, нежели кругъ B къ поверхности ци-
+6. линдра+; и впиши въ кругѣ A многоуголь-
никъ подобный вписанному въ кругѣ B; и на многоугольникѣ, въ A вписанномъ, составь призму; и пусть опять будетъ KD равная очертанію многоугольника вписаннаго въ кругѣ A, и FL равная сей прямой. Итакъ треугольникъ KTD будетъ больше многоугольника вписаннаго въ кругѣ A; ибо имѣетъ основаніе равное его очертанію, а высоту больше перпендикуляра, отъ центра къ одной изъ сторонъ многоугольника проведеннаго: а параллелограммъ EL равенъ вписанной призмы поверхности сложенной изъ параллелограммовъ; ибо онъ содержится въ сторонѣ цилиндра и въ прямой равной очертанію многоугольника, который есть основаніе призмы; слѣдовательно и треугольникъ RLF равенъ поверхности призмы. И поелику многоугольники вписанные въ кругахъ A, B, подобны, то они суть взаимно, какъ квадраты изъ радіусовъ круговъ; а и треугольники KTD, FRL суть взаимно тоже какъ квадраты изъ радіусовъ круговъ (33): посему какъ многоугольникъ вписанный въ кругѣ A, къ многоугольнику вписанному

въ B, такъ треугольникъ KTD къ треугольнику LFR. Но многоугольникъ вписанный въ кругѣ A, меньше треугольника KTD; посему и многоугольникъ вписанный въ кругѣ B, есть меньше треугольника FRL, слѣдственно меньше и поверхности призмы вписанной въ цилиндрѣ; что невозможно. Ибо, какъ многоугольникъ описанный около круга B, къ вписанному имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ B къ поверхности цилиндра, такожъ и премѣненіемъ; а многоугольникъ описанный около круга B, больше самаго круга B+: посему и многоугольникъ вписанный въ кругѣ B есть больше поверхности цилиндра, и слѣдовательно больше поверхности призмы. Итакъ кругъ B не больше поверхности цилиндра. Доказано же, что и не меньше, слѣдовательно ей равенъ. +2.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Поверхность всякаго прямаго конуса, кромѣ основанія, равна кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между стороною конуса и радіусомъ круга его основанія.

Пусть будетъ прямый конусъ, коего основаніе кругъ A, и C радіусъ онаго; и пусть D будетъ равная сторонѣ конуса, а E средняя пропорціональная между C, D; и наконецъ пусть будетъ B кругъ, имѣющій радіусъ равный E. Говорю, что кругъ B равенъ поверхности конуса, кромѣ основанія.

Ибо, естьли не равенъ, то или больше, или меньше.

Пусть, вопервыхъ, будетъ меньше. И поелику суть двѣ неравныя величины, поверхность конуса и кругъ B, изъ коихъ поверхность конуса бо́льшая; то возможно вписать равносторонный многоугольникъ въ кругѣ B и около него описать подобный вписанному, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели поверхность ко-
†6. нуса къ кругу B†. Вообрази « сіи многоугольники, » и еще многоугольникъ, описанный около круга A, подобный описанному около круга B; и на многоугольникѣ описанномъ около круга A, возставь пирамиду, имѣющую туже вершину что и конусъ. Итакъ, поелику многоугольники, описанные около круговъ A, B, подобны, то они суть взаимно какъ квадраты изъ

радіусовъ круговъ, то есть какъ квадраты изъ C, E, или какъ C къ D. Но какъ C къ D, такъ многоугольникъ описанный около круга A, къ поверхности пирамиды описанной около конуса: ибо C равна перпендикуляру, отъ центра круга къ одной изъ сторонъ многоугольника проведенному; а D равна сторонѣ конуса; очертаніе же многоугольника есть общая высота двухъ прямоугольниковъ, коихъ половины суть, многоугольникъ описанный около круга A и поверхность пирамиды описанной около конуса. Посему многоугольникъ описанный около круга A, къ многоугольнику описанному около круга B, имѣетъ тоже отношеніе, что и къ поверхности пирамиды описанной около конуса: чего ради поверхность пирамиды равна многоугольнику описанному около круга B. Поелику же многоугольникъ описанный около круга B, къ вписанному имѣетъ меньшее отношеніе, нежели поверхность конуса къ кругу B; посему и поверхность пирамиды описанной около конуса, къ многоугольнику вписанному въ кругѣ B, будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели поверхность конуса къ кругу B; « и премѣненіемъ, » что невоз-

можно (32): ибо поверхность пирамиды,
+13. по доказанному+, больше поверхности конуса, многоугольникъ же вписанный въ кругѣ B меньше круга B. Итакъ кругъ B не меньше поверхности конуса.

Говорю такожъ, что и не больше. Ибо, естьли возможно, пусть будетъ больше. Вообрази опять многоугольникъ вписанный въ кругѣ B и около него описанный другой, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели кругъ B къ поверхности конуса; и впиши въ кругѣ A многоугольникъ подобный вписанному въ кругѣ B; и возставь на томъ многоугольникѣ пирамиду, имѣющую туже вершину что и конусъ. И поелику многоугольники, вписанные въ кругахъ A, B, подобны; то они суть
1, XII. взаимно какъ квадраты изъ радіусовъ: посему многоугольникъ къ многоугольнику имѣетъ тоже отношеніе, что и C къ D. Но C къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели многоугольникъ вписанный въ кругѣ A, къ поверхности пирамиды вписанной въ конусѣ: ибо радіусъ круга A къ сторонѣ конуса имѣетъ большее отношеніе, нежели перпендикуляръ, отъ центра къ сторонѣ многоугольника про-

веденный, къ перпендикуляру, проведенному отъ вершины конуса къ сторонѣ тогожъ многоугольника (34). Посему многоугольникъ вписанный въ кругѣ А, къ многоугольнику вписанному въ кругѣ В, имѣетъ большее отношеніе, нежели тотъ же многоугольникъ къ поверхности пирамиды: а посему поверхность пирамиды есть больше многоугольника вписаннаго въ кругѣ В. Поелику же многоугольникъ описанный около круга В, къ многоугольнику въ немъ вписанному, имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ В къ поверхности конуса: посему многоугольникъ описанный около круга В, къ поверхности пирамиды вписанной въ конусѣ, тѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ В къ поверхности конуса (35), что невозможно (32): ибо многоугольникъ описанный больше круга В, а поверхность пирамиды вписанной въ конусѣ, меньше поверхности конуса. Итакъ кругъ В не больше поверхности конуса. А доказано, что и не меньше: слѣдственно ей равенъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Поверхность всякаго прямаго конуса къ его основанію имѣетъ тоже отношеніе, что сторона конуса къ радіусу основанія.

Пусть будетъ прямый конусъ, коего основаніе кругъ A, и пусть будетъ B равна радіусу круга A, а C сторонѣ конуса. Надлежитъ доказать, что поверхность конуса къ кругу A имѣетъ тоже отношеніе, что и C къ B.

Возьми между B, C среднюю пропорціональную E; и изложи кругъ D, коего радіусъ равенъ E. Итакъ кругъ D равенъ поверхности конуса, по доказанному
† 15. предъ симъ†. Еще же доказано, что кругъ D къ кругу A имѣетъ тоже отношеніе, что C къ B. Ибо каждое изъ сихъ отношеній есть тоже съ отношеніемъ квадрата изъ E къ квадрату изъ B; по причинѣ что круги суть взаимно какъ квадраты изъ поперечниковъ, равно какъ и изъ радіусовъ, поелику отношенія поперечниковъ суть тѣже, что и ихъ половинъ, то есть радіусовъ, коимъ равны B, E. Итакъ явно, что поверхность

конуса къ кругу A имѣетъ тоже отношеніе, что и C къ B.

Лемма. Пусть будетъ параллелограммъ BAG, и BG его поперечникъ. Раздѣли сторону BA какъ ниесть въ точкѣ D; и проведи чрезъ D параллельную къ AG прямую DH, и чрезъ *F параллельную къ BA прямую KL. Говорю, что прямоугольникъ въ BA, AG равенъ прямоугольнику въ BD, DF, и купно прямоугольнику содержимому въ DA и въ прямой сложенной изъ DF, AG.

И дѣйствительно, прямоугольникъ въ BA, AG есть цѣлое BG, прямоугольникъ же въ BD, DF есть BF; а прямоугольникъ, содержимый въ DA и въ прямой сложенной изъ DF, AG, есть наугольникъ MNO, ибо прямоугольникъ въ DA, AG равенъ KG, потому что дополненіе KH равно дополненію DL*; и прямоугольникъ *43, I.
въ DA, DF равенъ DL. Чего ради и цѣлое BG, то есть прямоугольникъ въ BA, AG равенъ прямоугольнику въ BD, DF и наугольнику MNO, который равенъ прямоугольнику въ DA и въ прямой сложенной изъ AG, DF (36).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели прямый конусъ разсѣчется плоскостію параллельною къ основанію; то поверхность конуса, которая между параллельныхъ плоскостей, равна кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между стороною конуса, отнятою параллельными плоскостями, и прямою равною обоимъ радіусамъ круговъ, кои на параллельныхъ плоскостяхъ.

Пусть будетъ конусъ, коего треугольникъ проходящій чрезъ ось, равенъ треугольнику ABC. Разсѣки оный плоскостію параллельною къ основанію, которая пусть сдѣлаетъ сѣченіе DE; и пусть BG будетъ ось конуса; и изложи кругъ, коего радіусъ былъбы средняя пропорціональная между AD и DF съ GA, и пусть сей кругъ будетъ H. Говорю, что кругъ H равенъ поверхности конуса, которая между DE, AC.

Ибо изложи круги L, K, такіе, чтобы квадратъ изъ радіуса круга K былъ равенъ прямоугольнику въ BD, DF; а квадратъ изъ радіуса круга L равенъ прямоугольнику въ BA, AG: посему кругъ L равенъ поверхности конуса ABC, а кругъ

К поверхности конуса DEB†. И поелику † 15.
прямоугольникъ въ BA, AG равенъ прямоугольнику въ BD, DF, и прямоугольнику содержимому въ AD и въ прямой сложенной изъ DF, AG†, по причинѣ что DF † въ 16, лем.
параллельна въ AG: но прямоугольникъ въ AB, AG равенъ квадрату изъ радіуса круга L; а прямоугольникъ въ BD, DF равенъ квадрату изъ радіуса круга K; прямоугольникъ же, содержимый въ DA и въ прямой сложенной изъ DF, AG, равенъ квадрату изъ радіуса круга H: посему квадратъ изъ радіуса круга L равенъ квадратамъ изъ радіусовъ круговъ K, H, слѣдственно и кругъ L равенъ кругамъ K, H (37). Но кругъ L равенъ поверхности конуса BAC, а кругъ K поверхности конуса DBE: чего ради остальная поверхность конуса, которая между параллельными плоскостями DE, AC, равна кругу H.

Леммы.

1. Конусы имѣющіе равныя высоты, суть взаимно какъ основанія*: А имѣющіе * 11, XII.
равныя основанія, суть взаимно какъ высоты*. * 14, XII.

2. Ежели цилиндръ разсѣчется плоскостію параллельною къ основаніямъ, то

произшедшіе цилиндры будутъ взаимно
13, XII. какъ оси.

3. Когда конусы и цилиндры (38) имѣютъ тѣже основанія, то конусы суть взаимно, какъ цилиндры.

4. Равныхъ конусовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ: и которыхъ конусовъ основанія обратно пропорціо-
15, XII. нальны высотамъ, тѣ суть равные.

5. Конусы, коихъ основаній поперечники пропорціональны высотамъ, то есть осямъ, суть взаимно въ утроенномъ от-
12, XII. ношеніи поперечниковъ основаній.

Все сіе доказано нашими предшественниками.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели будутъ два прямые конуса такіе, что поверхность одного равна основанію другаго, и перпендикуляръ проведенный отъ центра основанія къ сторонѣ перваго, равенъ высотѣ другаго; то конусы будутъ равные.

Пусть будутъ два прямые конуса ABC, DEF такіе, чтобы конуса ABC основаніе было равно поверхности конуса DEF, а высота AG равна перпендикуляру KH, отъ центра H къ одной изъ сторонъ

конуса, напримѣръ къ DE, проведенному. Говорю, что конусы равны.

Поелику основаніе конуса ABC равно поверхности конуса DEF; а равныя къ тойже имѣютъ тоже отношеніе*: то *7, V. какъ основаніе конуса BAC къ основанію конуса DEF, такъ поверхность конуса DEF къ основанію конуса DEF. Но какъ поверхность сего конуса къ его основанію, такъ DH къ HK. Ибо доказано, что поверхность всякаго прямаго конуса къ его основанію имѣетъ тоже отношеніе, что сторона къ радіусу основанія, то есть, тоже что DE къ EH+; притомъ же +16. какъ ED къ HE, такъ DH къ HK, ибо треугольники «DEH, DKH» суть равноугольные; и HK равна AG. Посему какъ основаніе конуса BAC къ основанію конуса DEF, такъ высота конуса DEF къ высотѣ конуса ABC. Чего ради основанія конусовъ ABC, DEF суть обратно пропорціональны высотамъ. Посему конусъ BAC равенъ конусу DEF.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Всякому, сложенному изъ двухъ прямыхъ конусовъ, ромбу равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное поверхности

одного изъ конусовъ составляющихъ ромбъ, а высоту равную перпендикуляру, проведенному отъ вершины другаго конуса на сторону перваго.

Пусть будетъ, сложенный изъ двухъ прямыхъ конусовъ, ромбъ ABCD, коего основанiе есть кругъ написанный около поперечника BC, а высота AD; и сверхъ того конусъ GHK, имѣющiй основанiе равное поверхности конуса ABC, а высоту равную перпендикуляру, отъ D къ AB или къ ея продолженiю, проведенному, который пусть будетъ DF; и пусть высота конуса GHK будетъ прямая HL, которая равна DF. Говорю, что ромбъ ABCD равенъ конусу GHK.

Изложи другой конусъ MNO, имѣющiй основанiе равное основанiю конуса ABC, а высоту равную AD; и пусть его высота будетъ NP. Итакъ, поелику NP равна AD, то какъ NP къ DE, такъ AD
7, v. къ DE. Но какъ AD къ DE, такъ ромбъ
14, XI, и 18, v. ABCD къ конусу BCD; а какъ NP къ DE, такъ конусъ MNO къ конусу BCD, ибо основанiя ихъ равны: посему какъ конусъ MNO къ конусу BCD, такъ ромбъ ABCD къ конусу BCD. Чего ради конусъ MNO
9, v. равенъ ромбу ABCD. И поелику поверх-

ность конуса ABC равна основанію конуса GHK: то какъ поверхность конуса ABC къ его основанію, такъ основаніе конуса GHK къ основанію конуса MNO; ибо основаніе конуса ABC равно основанію конуса MNO. Но какъ поверхность конуса ABC къ его основанію, такъ AB къ BE+, то есть AD къ DF, ибо тре- + 16.
угольники ABE, ADF подобны: посему и какъ основаніе конуса GHK къ основанію конуса MNO, такъ AD къ DF. Но AD равна NP, по положенію; и DF равна LH: посему какъ основаніе конуса GHK къ основанію конуса MNO, такъ высота NP къ высотѣ HL. Итакъ основанія конусовъ GHK, MNO суть обратно пропорціональны высотамъ: слѣдственно сіи конусы равны. Доказано же, что конусъ MNO равенъ ромбу ABCD: посему и конусъ GHK равенъ ромбу ABCD.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Ежели прямый конусъ разсѣчется плоскостію параллельною къ основанію; а на произшедшемъ кругѣ напишется конусъ, имѣющій вершину въ центрѣ основанія; и произшедшій ромбъ отнимется отъ цѣлаго конуса: то остатку будетъ

равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное поверхности конуса, которая между параллельныхъ плоскостей, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра основанія къ одной изъ сторонъ конуса проведенному.

Пусть будетъ прямый конусъ ABC. Разсѣки оный плоскостію параллельною къ основанію, которая пусть сдѣлаетъ сѣченіе DE; и пусть центръ основанія будетъ F, и на кругѣ, что около поперечника DE, написанъ будетъ конусъ, имѣющій вершину въ F: то получится ромбъ BDFE сложенный изъ двухъ прямыхъ конусовъ. Пусть еще будетъ конусъ KHL, коего основаніе равно поверхности что между DE, AC, а высота равна перпендикуляру FG, отъ F къ AB проведенному. Говорю, что естьли отъ конуса ABC отнять ромбъ BDFE, то остатокъ будетъ равенъ конусу HKL.

Изложи еще два конуса MNO, QPR такіе: — чтобы основаніе конуса MNO равно было поверхности конуса ABC, а высота равна FG; посему конусъ MNO равенъ конусу ABC: ибо естьли будутъ два прямые конуса, въ коихъ поверхность одного равна основанію другаго, а перпен-

дикуляръ, проведенный отъ центра основанія къ сторонѣ перваго, равенъ высотѣ другаго, то сіи конусы равны†: — и чтобы † 18. основаніе конуса PQR было равно поверхности конуса DBE, а высота равна FG: посему конусъ PQR равенъ ромбу BDFE†; все † 19. какъ доказано выше. И поелику поверхность конуса ABC сложена изъ поверхности конуса BDE, и поверхности что между DE, AC: поверхность же конуса ABC равна основанію конуса MNO; а поверхность конуса DBE равна основанію конуса PQR; и которая между DE, AC, равна основанію конуса HKL: посему основаніе конуса MNO равно основаніямъ конусовъ HKL, PQR. И сіи всѣ конусы суть одинакой высоты: посему конусъ MNO равенъ конусамъ HKL, PQR. Но конусъ MNO равенъ конусу ABC, а конусъ QPR ромбу BDEF: чего ради остальный конусъ HKL равенъ остатку отъ конуса ABC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Ежели ромба, сложеннаго изъ двухъ прямыхъ конусовъ, одинъ конусъ разсѣчется плоскостію параллельною къ основанію; и на произшедшемъ кругѣ напишется конусъ, имѣющій туже верши-

ну съ другимъ конусомъ ромба; и произшедшій ромбъ отнимется отъ цѣлаго: то остатку будетъ равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное поверхности что между параллельными плоскостями, а высоту равную перпендикуляру, отъ вершины втораго конуса къ сторонѣ перваго проведенному.

Пусть будетъ ABCD ромбъ, сложенный изъ двухъ прямыхъ конусовъ. Разсѣки одинъ изъ нихъ плоскостію параллельною къ основанію, которая пусть сдѣлаетъ сѣченіе EF; и на кругѣ, что около поперечника EF, пусть написанъ будетъ конусъ, имѣющій вершину въ D: то получится ромбъ EBFD; и вообрази что онъ отнятъ отъ цѣлаго ромба; и изложи конусъ HKL, имѣющій основаніе равное поверхности что между AC, EF, а высоту равную перпендикуляру, отъ точки D къ прямой BA, или къ ея продолженію, проведенному. Говорю, что конусъ HKL равенъ помянутому остатку.

Изложи еще два конуса MNO, PQR такіе: — чтобы основаніе конуса MNO равно было поверхности конуса ABC, а высота равна DG: то въ силу доказан-
† 19. наго†, конусъ MNO равенъ ромбу ABCD: —

и чтобы основаніе конуса PQR равно было поверхности конуса EBF, а высота равна DG: посему также конусъ PQR равенъ ромбу EBFD†. И поелику поверхность конуса ABC сложена изъ поверхности конуса EBF, и изъ поверхности что между EF, AC: поверхность же конуса ABC равна основанію конуса MNO; а поверхность конуса EBF равна основанію конуса PQR; и которая между EF, AC, равна основанію конуса HKL: посему основаніе конуса MNO равно основаніямъ конусовъ PQR, HKL. И сіи всѣ конусы суть одинакой высоты: посему конусъ MNO равенъ конусамъ HKL, PQR. Но конусъ MNO равенъ ромбу ABCD, а конусъ PQR ромбу EBFD: чего ради остальный конусъ HKL равенъ остатку отъ ромба ABCD.

† 19.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Ежели въ кругѣ впишется многоугольникъ четносторонный (39) и равносторонный; и протянутся въ семъ многоугольникѣ діагонали (40), кои будутъ параллельны къ одной изъ стягивающихъ его «соприкосновенныя» стороны: то всѣ діагонали къ поперечнику круга будутъ имѣть тоже отношеніе, что

прямая, стягивающая безъ одной половину сторонъ, къ сторонѣ многоугольника.

Пусть будетъ кругъ ABCD; и пусть въ немъ будетъ вписанъ многоугольникъ AEFBGHCMNDLK, и протянутся EK, FL, BD, GN, HM: то явно, что сіи прямыя параллельны къ стягивающей двѣ стороны многоугольника. Говорю, что всѣ помянутыя прямыя къ поперечнику AC круга имѣютъ тоже отношеніе, что CE къ EA.

Протяни FK, LB, GD, HN. Итакъ FK параллельна къ EA, а BL къ FK, а DG къ BL, а HN къ DG, и еще CM къ HN. И поелику двѣ прямыя EA, KF параллельны, и проведены двѣ же EK, AP:
4, VI. то какъ EO къ OA, такъ KO къ OP; и какъ KO къ OP, такъ FQ къ QP: и какъ FQ къ QP, такъ LQ къ QR; и какъ LQ къ QR, такъ BS къ SR; и какъ BS къ SR, такъ DS къ ST; и какъ DS къ ST, такъ GU къ UT; и какъ GU къ UT, такъ NU къ UV; и какъ NU къ UV, такъ HX къ XV; и еще, какъ HX къ XV, такъ MX къ XC. Посему и какъ всѣ ко всѣмъ, такъ одна
12, V. къ одной, то есть, какъ EO къ OA, такъ EK, FL, BD, GN, HM къ поперечнику AC. Но какъ EO къ OA, такъ CE

къ EA*: чего ради какъ CE къ EA, такъ *3, VI. EK, FL, BD, GN, HM къ поперечнику AC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Ежели въ отрѣзкѣ круга впишется многоугольникъ, имѣющій стороны, кромѣ основанія, всѣ взаимно равныя и въ четномъ числѣ, и протянутся параллельныя къ основанію отрѣзка діагонали многоугольника: то всѣ протянутыя и половина основанія будутъ къ высотѣ отрѣзка имѣть тоже отношеніе, что прямая, проведенная отъ конца поперечника до стороны многоугольника, къ сторонѣ многоугольника.

Пусть будетъ въ кругѣ ABC проведена нѣкая прямая AC, и въ отрѣзкѣ ABC, надъ AC, вписанъ многоугольникъ, имѣющій стороны, кромѣ основанія AC, всѣ взаимно равныя и въ четномъ числѣ, и протянуты FG, EH, кои параллельны къ основанію отрѣзка. Говорю, что какъ FG, EH, AO къ BO, такъ DF къ FB.

Ибо опять протянувъ GE, AH, будутъ оныя параллельны къ BF. И потому же будетъ: какъ KF къ KB, такъ GK къ KL, такъ EM къ ML, такъ MH къ MN, и такъ OA къ ON. Посему какъ всѣ ко

всѣмъ, такъ одна къ одной, то есть, какъ FG, EH, AO къ BO, такъ FK къ KB. Но какъ FK къ KB, такъ DF къ FB: чего ради какъ DF къ FB, такъ FG, EH, AO къ BO.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ ABCD; и въ немъ пусть впишется многоугольникъ равносторонный, коего число сторонъ дѣлимо на четыре; и пусть будутъ два поперечника AC, BD «взаимно перпендикулярные.» Ежели около неподвижнаго поперечника, AC оборотится кругъ ABCD, имѣя многоугольникъ: то явно, что окружность его перенесется по поверхности шара; многоугольника же углы, кромѣ тѣхъ, кои при точкахъ A, C, перенесутся по окружностямъ круговъ, написанныхъ на плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ кругу ABCD, и поперечники ихъ будутъ діагонали параллельныя къ BD; стороны же многоугольника перенесутся по нѣкоторымъ конусамъ, а именно: AF, AN по поверхности конуса, коего основаніе кругъ около поперечника FN, а вершина точка A; FG, MN по конической поверхности, коея основаніе кругъ

около поперечника MG, а вершина та точка, въ которой FG, MN продолженныя встрѣтятся взаимно и съ AC; а стороны BG, MD по конической поверхности, коея основаніе кругъ около поперечника BD, перпендикулярный къ кругу ABCD, а вершина та точка, въ которой BG, DM продолженныя встрѣтятся взаимно и съ CA. Такожъ и въ другомъ полушаріи стороны перенесутся по коническимъ поверхностямъ, одинакимъ съ преждесказанными. Такимъ образомъ въ шарѣ впишется нѣкая, содержимая во всѣхъ помянутыхъ коническихъ поверхностяхъ, фигура, коея поверхность будетъ меньше поверхности шара.

Ибо, отъ разсѣченія шара плоскостію, чрезъ BD проходящею, перпендикулярною къ кругу ABCD, какъ поверхность одного изъ полушарій, такъ и поверхность фигуры въ немъ вписанной, имѣютъ тѣже края на одной плоскости, ибо обѣихъ поверхностей предѣлъ есть окружность круга, около поперечника BD написаннаго, перпендикулярнаго къ кругу ABCD; и суть обѣ выпуклы съ тойже стороны; и одна изъ нихъ объемлется другою, и тѣже съ нею края имѣющею,

† пол. 4. плоскостію†. Подобно и поверхность фигуры, вписанной въ другомъ полушаріи, есть меньше поверхности полушарія. Чего ради и цѣлая поверхность фигуры въ шарѣ вписанной, меньше поверхности шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Поверхность фигуры вписанной въ шарѣ равна кругу, изъ радіуса коего квадратъ равняется прямоугольнику, содержимому въ сторонѣ фигуры и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ многоугольника, составляющимъ четыреугольники, и параллельнымъ къ стягивающей двѣ стороны многоугольника.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ ACBD; и пусть въ немъ будетъ вписанъ равносторонный многоугольникъ, коего число сторонъ дѣлимо на четыре; и вообрази въ шарѣ фитуру вписанную посредствомъ многоугольника вписаннаго; и протяни діагонали EF, GH, CD, KL, MN, параллельныя къ стягивающей двѣ стороны многоугольника; и изложи кругъ O, изъ коего радіуса квадратъ былъ бы равенъ прямоугольнику содержимому въ AE и въ прямой равной прямымъ EF, GH,

CD, KL, MN. Говорю, что сей кругъ равенъ поверхности фигуры вписанной въ шарѣ.

Изложи еще круги P, Q, R, S, T, U такiе, чтобы квадратъ изъ радiуса круга P былъ равенъ прямоугольнику въ EA и въ половинѣ прямой EF; квадратъ изъ радiуса круга Q прямоугольнику въ EA и въ половинѣ прямыхъ EF, GH; квадратъ изъ радiуса круга R прямоугольнику въ EA и въ половинѣ прямыхъ GH, CD; квадратъ изъ радiуса круга S прямоугольнику въ AE и въ половинѣ прямыхъ CD, KL; квадратъ изъ радiуса круга T прямоугольнику въ AE и въ половинѣ прямыхъ KL, MN; и квадратъ изъ радiуса круга U прямоугольнику въ AE и въ половинѣ MN. Итакъ кругъ P равенъ поверхности конуса AEF+, кругъ Q поверхности ко- +15. нуса, которая между EF, GH+, кругъ R +17. той, которая между GH, CD, кругъ S той, которая между DC, KL, и еще кругъ T поверхности конуса, которая между KL, MN, а кругъ U равенъ поверхности конуса MBN: посему всѣ круги равны поверхности фигуры вписанной въ шарѣ. Притомъ явно, что квадраты изъ радiусовъ круговъ P, Q, R, S, T, U равны

прямоугольнику, содержимому въ АЕ и въ половинѣ прямыхъ EF, GH, CD, KL,
1, 11. MN два раза взятыхъ, которая и есть сіи самыя прямыя EF, GH, CD, KL, MN: посему квадраты изъ радіусовъ круговъ P, Q, R, S, T, U равны прямоугольнику въ АЕ и во всѣхъ EF, GH, CD, KL, MN. Но и квадратъ изъ радіуса круга О равенъ прямоугольнику въ АЕ и въ прямой сложенной изъ EF, GH, CD, KL, MN: посему квадратъ изъ радіуса круга О равенъ квадратамъ изъ радіусовъ всѣхъ круговъ P, Q, R, S, T, U; а посему кругъ О равенъ кругамъ P, Q, R, S, T, U (37). Доказано же, что круги P, Q, R, S, T, U равны поверхности помянутой фигуры: чего ради и кругъ О равенъ поверхности фигуры.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Поверхность фигуры вписанной въ шарѣ, содержимой въ коническихъ поверхностяхъ, есть меньше, нежели четырекратный наибольшій кругъ шара.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ ABCD, и въ немъ вписанный равностоpонный и равноугольный многоугольникъ, имѣющій число сторонъ дѣлимое на че-

тыре; и вообрази вписанную посредствомъ его фигуру, содержимую въ коническихъ поверхностяхъ. Говорю, что поверхность фигуры вписанной есть меньше, нежели четырекратный наибольшій кругъ шара.

Проведи, стягивающія двѣ стороны многоугольника діагонали EI, HM, и параллельныя къ нимъ FK, DB, GL; и изложи кругъ R такой, чтобы квадратъ изъ радіуса его былъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ EA и въ равной всѣмъ прямымъ EI, FK, BD, GL, HM: то по доказанному предъ симъ, кругъ R равенъ поверхности помянутой фигуры†. И поелику доказано же, что какъ прямая равная всѣмъ EI, FK, BD, GL, HM, къ поперечнику AC круга ABCD, такъ CE къ EA†: посему прямоугольникъ содержимый въ прямой равной всѣмъ сказаннымъ и въ EA, то есть квадратъ изъ радіуса круга R равенъ прямоугольнику въ AC, CE. Но прямоугольникъ въ AC, CE меньше квадрата изъ AC: посему и квадратъ изъ радіуса круга R меньше квадрата изъ AC; слѣдственно и радіусъ круга R меньше AC; чего ради и поперечникъ круга R меньше, нежели двукратный по-

† 25.

† 22.

перечникъ круга ABCD; и потому два поперечника круга ABCD суть больше поперечника круга R, и четырекратный квадратъ изъ поперечника круга ABCD, то есть изъ AC, больше квадрата изъ поперечника круга R. Но какъ четырекратный квадратъ изъ AC къ квадрату изъ поперечника круга R, такъ четыре круга ABCD къ кругу R: посему четыре круга ABCD суть больше круга R; итакъ кругъ R меньше, нежели четырекратный наибольшій кругъ. А кругъ R равенъ, по доказанному, поверхности помянутой фи-
+25. гуры+: слѣдовательно поверхность фигуры меньше, нежели четырекратный наибольшій кругъ шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Фигурѣ вписанной въ шарѣ, содержимой въ коническихъ поверхностяхъ, равенъ конусъ, имѣющій основаніе кругъ равный поверхности фигуры вписанной въ шарѣ, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра шара къ одной изъ сторонъ многоугольника проведенному.

Пусть будетъ шаръ, и наибольшій его кругъ ABCD, и все прочее какъ въ предъидущемъ; и пусть будетъ прямый конусъ

R, имѣющій основаніе равное поверхности фигуры вписанной въ шарѣ, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра шара къ одной изъ сторонъ многоугольника проведенному. Надлежитъ доказать, что конусъ R равенъ фигурѣ въ шарѣ вписанной.

На кругахъ, кои около поперечниковъ FN, GM, HL, IK, напиши конусы, имѣющіе вершину въ центрѣ шара: то составится тѣлесный ромбъ, изъ конуса, коего основаніе кругъ около поперечника FN, а вершина точка A, и изъ конуса, коего основаніе тотъ же кругъ, а вершина точка X. Сей ромбъ равенъ конусу, имѣющему основаніе равное поверхности конуса NAF, а высоту равную перпендикуляру, отъ X къ AF проведенному+; + 19.
остатокъ же отъ ромба, содержимый въ конической поверхности что между параллельныхъ плоскостей, чрезъ FN, GM проведенныхъ, и въ поверхностяхъ конусовъ FNX, GMX, равенъ конусу, имѣющему основаніе равное поверхности конуса, которая между параллельныхъ плоскостей, чрезъ FN, GM проходящихъ, а высоту равную перпендикуляру, отъ X къ FG проведенному: какъ то все сіе

†21. уже доказано†. Также остатокъ отъ конуса, содержимый въ поверхности конуса, которая между параллельныхъ плоскостей чрезъ GM, BD проведенныхъ, и въ поверхностяхъ конуса GMX и круга что около поперечника BD, равенъ конусу, имѣющему основаніе равное поверхности конуса, которая между параллельныхъ плоскостей чрезъ GM, BD проведенныхъ, а высоту равную перпендикуляру, отъ
†20. X къ BG проведенному†. Подобнымъ образомъ и въ другомъ полушаріи ромбъ XKCI и остатки будутъ равны таковымъ и толикому числу конусовъ, о каковыхъ и о коликомъ числѣ оныхъ первѣе было сказано. Итакъ явно, что цѣлая фигура въ шарѣ вписанная, равна всѣмъ помянутымъ конусамъ. Но сіи конусы равны конусу R: ибо конусъ R имѣетъ высоту равную высотѣ каждаго изъ помянутыхъ конусовъ, а основаніе равное всѣхъ ихъ основаніямъ. Слѣдственно явно, что фигура вписанная въ шарѣ, равна изложенному конусу R.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Фигура вписанная въ шарѣ, содержимая въ коническихъ поверхностяхъ, есть

меньше нежели четырекратный конусъ, имѣющій основаніе равное наибольшему кругу шара, а высоту равную его радіусу.

Пусть будетъ R конусъ, который фигурѣ вписанной равенъ, то есть, имѣющій основаніе равное поверхности фигуры, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра шара къ одной изъ сторонъ многоугольника проведенному; и пусть еще будетъ конусъ O, имѣющій основаніе равное кругу ABCD, а высоту равную его радіусу.

Поелику конусъ R имѣетъ основаніе равное поверхности фигуры вписанной въ шарѣ, а высоту равную перпендикуляру, отъ X къ AF проведенному; доказано же, что поверхность фигуры вписанной меньше, нежели четырекратный
наибольшій кругъ шара†: посему основаніе †26.
конуса R есть меньше, нежели четырекратное основаніе конуса O. А и высота конуса R меньше высоты конуса O. Итакъ, поелику конусъ R имѣетъ основаніе меньшее, нежели четырекратное основаніе конуса O, и высоту меньшую высоты его: то явно, что конусъ R меньше, нежели четырекратный конусъ O. Но
конусъ R равенъ фигурѣ вписанной†: по- †27.

сему и фигура вписанная меньше, нежели четырекратный конусъ О.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ ABCD; и пусть около круга ABCD опишется многоугольникъ равносторонный и равноугольный, коего число сторонъ дѣлимо на четыре, а около него кругъ, который объемля многоугольникъ имѣетъ
сл. 2: d, γ. тотъ же центръ что и кругъ ABCD; и около неподвижнаго поперечника EG пусть оборотится плоскость многоугольника EFGH и круга ABCD. Явно, что окружность круга ABCD перенесется по поверхности шара, а окружность круга EFGH перенесется по поверхности другаго шара, имѣющаго тотъ же центръ, что и меньшій; точки же касанія сторонъ многоугольника напишутъ на поверхности меньшаго шара круги, перпендикулярные къ кругу ABCD; и углы многоугольника, кромѣ тѣхъ, кои при точкахъ E, G, перенесутся по окружностямъ круговъ, на поверхности большаго шара написанныхъ, перпендикулярныхъ къ кругу EFGH; а стороны многоугольника перенесутся по коническимъ поверхностямъ,

какъ и прежде. Итакъ фигура содержимая въ коническихъ поверхностяхъ, будетъ описанная около меньшаго шара и вписанная въ большемъ. Мы докажемъ слѣдующимъ образомъ, что поверхность описанной фигуры больше поверхности шара.

Пусть будетъ KD поперечникъ одного изъ круговъ меньшаго шара, и K, D точки, въ коихъ двѣ стороны описаннаго многоугольника касаются къ кругу ABCD. Когда же шаръ разсѣченъ плоскостію проведенною чрезъ KD, перпендикулярною къ кругу ABCD; то и поверхность фигуры описанной около шара, разсѣчется тою же плоскостію. Явствуетъ же, что поверхности « отрѣзковъ шара и фигуры » имѣютъ тѣже края на плоскости, ибо и той и другой предѣлъ есть окружность круга, около поперечника KD написаннаго, перпендикулярнаго къ кругу ABCD; и что обѣ выпуклы съ тойже сторонъ, и одна изъ нихъ объемлется другою и, тѣже съ нею края имѣющею, плоскостію: посему поверхность шароваго отрѣзка какъ объемлемая, меньше фигуры описанной около сего отрѣзка†. Подобно и поверх-

† пол. 4.

ность остальнаго отрѣзка меньше поверхности фигуры описанной около сего же отрѣзка. Слѣдственно и цѣлая поверхность шара есть меньше поверхности фигуры описанной.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Поверхность фигуры описанной около шара, равна кругу, изъ радіуса коего квадратъ равняется прямоугольнику, содержимому въ одной сторонѣ многоугольника и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ его, параллельнымъ къ которой ниесть изъ тѣхъ, кои стягиваютъ двѣ стороны многоугольника.

Ибо фигура описанная около меньшаго шара, есть вписанная въ большемъ. Доказано же, что поверхность фигуры вписанной въ шарѣ, содержимой въ коническихъ поверхностяхъ, равна кругу, изъ радіуса коего квадратъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ одной сторонѣ многоугольника и въ прямой равной всѣмъ его діагоналямъ, параллельнымъ къ которой ниесть изъ тѣхъ, кои стягиваютъ
† 25. двѣ стороны многоугольника†: слѣдственно вышесказанное явствуетъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Поверхность фигуры описанной около шара, есть больше, нежели четырекратный наибольшій кругъ сего шара.

Пусть будетъ шаръ, кругъ, и все прочее, какъ сказано было прежде; и пусть будетъ кругъ L, равный поверхности изложенной фигуры, описанной около меньшаго шара.

Поелику въ кругѣ EFGH вписанъ многоугольникъ равносторонный и четноугольный; то всѣ діагонали, параллельныя къ HF, имѣютъ къ HF тоже отношеніе, что KH къ KF+. Посему прямоугольникъ, + 22.
содержимый въ одной сторонѣ многоугольника и въ прямой равной всѣмъ его діагоналямъ, равенъ прямоугольнику въ FH, HK*: * 16, VI.
а посему и квадратъ изъ радіуса круга L равенъ прямоугольнику въ FH, HK+: + 25.
слѣдственно радіусъ круга L больше HK. Но HK равна поперечнику круга ABCD, ибо она двукратная прямой XS (41), которая есть радіусъ круга ABCD. Итакъ явно, что кругъ L, то есть поверхность фигуры описанной около шара, больше нежели четырекратный наибольшій кругъ шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Фигурѣ описанной около меньшаго шара, равенъ конусъ, имѣющій основаніе кругъ равный поверхности фигуры, а высоту равную радіусу шара.

Ибо фигура описанная около меньшаго шара, есть вписанная въ большемъ. Доказано же, что фигурѣ вписанной, содержимой въ коническихъ поверхностяхъ, равенъ конусъ, имѣющій основаніе кругъ равный поверхности фигуры, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра шара къ сторонѣ многоугольника проведен-
+27. ному+; и сей перпендикуляръ равенъ радіусу меньшаго шара: слѣдственно предложенное явствуетъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Отсюда явствуетъ, что фигура описанная около меньшаго шара, больше нежели четырекратный конусъ, имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту равную его радіусу.

И дѣйствительно, поелику сей фигурѣ равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное ея поверхности, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра къ сто—

ронѣ многоугольника проведенному, то есть радіусу меньшаго шара+; и поелику +32.
поверхность фигуры описанной около шара, больше нежели четырекратный наибольшій его кругъ+: то фигура опи- +31.
санная около шара, есть больше нежели четырекратный конусъ, имѣющій основаніе наибольшій кругъ, а высоту радіусъ шара: ибо и конусъ ей равный, есть больше, нежели четырекратный помянутый конусъ*, потому что имѣетъ *11, XII.
основаніе больше нежели четырекратное, а высоту равную.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Ежели въ шарѣ впишется фигура, и около него опишется другая, чрезъ обращеніе подобныхъ многоугольниковъ, каковы были прежде составлены: то поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной будетъ имѣть удвоенное отношеніе стороны многоугольника описаннаго около наибольшаго круга, къ сторонѣ многоугольника вписаннаго въ семъ же кругѣ; а самая фигура описанная къ фигурѣ вписанной будетъ имѣть утроенное отношеніе тѣхъ сторонъ.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ

ABCD; и пусть будетъ въ немъ вписанъ многоугольникъ равносторонный, коего число сторонъ дѣлимо на четыре, и около сего же круга описанъ другой многоугольникъ подобный первому, такъ чтобы многоугольника описаннаго стороны касались къ кругу въ срединѣ дугъ, отнимаемыхъ сторонами многоугольника вписаннаго; и пусть EG, HF будутъ два взаимно перпендикулярные поперечники круга, объемлющаго многоугольникъ описанный, и имѣющіе одинакое положеніе съ поперечниками AC, BD; и вообразимъ, что чрезъ противулежащіе углы многоугольника, протянуты діагонали, параллельныя взаимно и къ BF, HD; и естьли около неподвижнаго поперечника EG оборотимъ многоугольники: то около шара опишется фигура и въ немъ впишется другая. Надлежитъ доказать, что поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной имѣетъ удвоенное отношеніе прямыхъ EL къ AK; а самая фигура описанная къ вписанной имѣетъ утроенное отношеніе тѣхъ же прямыхъ.

Пусть будетъ M кругъ равный поверхности фигуры описанной около шара, а N кругъ равный поверхности фигуры

вписанной. Итакъ квадратъ изъ радіуса круга M равенъ прямоугольнику въ EL и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ многоугольника описаннаго†; а квадратъ изъ радіуса круга N равенъ содержимому въ AK и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ многоугольника вписаннаго†. И поелику многоугольники подобны, то подобны и прямоугольники содержимые въ помянутыхъ прямыхъ, то есть въ діагоналяхъ и въ сторонахъ многоугольниковъ (42); слѣдственно суть взаимно какъ квадраты изъ сторонъ многоугольниковъ. Но прямоугольники содержимые въ помянутыхъ прямыхъ, суть взаимно и какъ квадраты изъ радіусовъ круговъ M, N*: посему поперечники круговъ M, N суть какъ стороны многоугольниковъ. А самые круги M, N суть взаимно въ удвоенномъ отношоніи поперечниковъ†, и равны поверхностямъ фигуръ описанной и вписанной: посему явно, что поверхность фигуры около шара описанной, къ поверхности вписанной имѣетъ удвоенное отношеніе стороны EL къ сторонѣ AK.

† 30.
† 25.
* 7, V.
† 2, XII.

Пусть еще будутъ взяты два конуса O, P такіе, чтобы конусъ O имѣлъ основаніе кругъ равный M, а конусъ P

основаніе кругъ равный N; и чтобъ конусъ O имѣлъ высоту равную радіусу шара, а конусъ P равную перпендикуляру, отъ центра шара къ AK проведенному. Итакъ по доказанному, конусъ O равенъ
+32. фигурѣ описанной+, а конусъ P вписан-
+27. ной+. И поелику многоугольники подобны; то EL къ AK имѣетъ тоже отношеніе, что радіусъ шара къ перпендикуляру, отъ центра къ сторонѣ многоугольника проведенному: посему высота конуса O къ высотѣ конуса P имѣетъ тоже отношеніе,
11, V. что EL къ AK. Но и поперечникъ круга M къ поперечнику круга N имѣетъ тоже отношеніе, что и EL къ AK: посему поперечники основаній конусовъ O, P пропорціональны высотамъ. Слѣдственно
оп. 24, XII конусы сіи подобны: и потому конусъ O къ конусу P имѣетъ утроенное отношеніе поперечника круга M къ попереч-
12, XII нику круга N. Итакъ явно, что фигура описанная къ фигурѣ вписанной имѣетъ утроенное отношеніе стороны EL къ сторонѣ AK.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Поверхность всякаго шара есть четырекратная наибольшаго его круга.

Пусть будетъ нѣкій шаръ, и наибольшаго его круга четырекратный кругъ А. Говорю, что кругъ А равенъ поверхности шара.

Ибо естьли не равенъ, то или больше или меньше.

Пусть вопервыхъ, поверхность шара будетъ больше круга А. И поелику суть двѣ неравныя величины, поверхность шара и кругъ А, то возможно взять двѣ неравныя прямыя такія, чтобъ большая къ меньшей имѣла меньшее отношеніе, нежели поверхность шара къ кругу А+. +3.
Пусть будутъ взяты таковыя B, C; и средняя пропорціональная между B, C пусть будетъ D. Представимъ, что шаръ разсѣченъ плоскостію чрезъ центръ, по кругу EFGH. И вообразимъ многоугольники, вписанный въ семъ кругѣ и описанный около него, такіе, чтобы описанный былъ подобенъ вписанному, и чтобы сторона описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣла меньшее отношеніе, нежели B, къ D+: посему удвоенное отношеніе +4.
сторонъ будетъ меньше удвоеннаго отношенія прямыхъ B, D*. Но удвоенное *сл: q, V.
отношеніе прямыхъ B, D, есть отношеніе B къ C*; а удвоенное отношеніе сто- *опр. 10, V.

роны многоугольника описаннаго къ сторонѣ вписаннаго, есть отношеніе поверхности тѣла описаннаго около шара,
†34. къ поверхности вписаннаго†: посему поверхность фигуры описанной около шара, къ поверхности вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели поверхность шара къ кругу А; « также и премѣненіемъ, » что нелѣпо (32). Ибо поверхность описанной больше поверхности шара, а поверхность вписанной меньше поверхности круга А: поелику доказано, что поверхность фигуры вписанной меньше, нежели четырекратный наибольшій кругъ
†26. шара†; кругъ же А есть четырекратный наибольшаго круга. Итакъ поверхность шара не больше круга А.

Говорю же, что и не меньше. Ибо, естьли возможно, пусть будетъ меньше. И пусть опять найдены будутъ двѣ прямыя В, С такія, чтобы В къ С имѣла меньшее отношеніе, нежели кругъ
†2. А къ поверхности шара†, а между В, С средняя пропорціональная D. И опять впиши многоугольникъ и опиши другой, такіе, чтобы сторона описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣла меньшее от-
†4. ношеніе, нежели В къ D†: посему и удвоен-

ное отношеніе будетъ меньше удвоеннаго*: а посему поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ А къ поверхности шара, что нелѣпо. Ибо поверхность описанной больше круга А, а поверхность вписанной меньше поверхности шара. Итакъ поверхность шара не меньше круга А. Доказано же, что и не больше: слѣдственно поверхность шара равна кругу А, то есть четырекратному наибольшаго круга. *сл. q

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Всякій шаръ есть четырекратный конуса, имѣющаго основаніе равное наибольшему кругу шара, а высоту равную его радіусу.

Пусть будетъ нѣкій шаръ, и наибольшій его кругъ ABCD.

Буде шаръ не есть четырекратный сказаннаго конуса, то пусть, естьли возможно, будетъ больше нежели четырекратный. И пусть будетъ конусъ O, имѣющій основаніе четырекратное круга ABCD, а высоту равную радіусу шара: посему шаръ больше конуса O. И поелику суть двѣ неравныя величины, шаръ и конусъ:

што возможно взять двѣ неравныя прямыя шакія, чтобы большая къ меньшей имѣла меньшее отношеніе, нежели шаръ къ
†3. конусу О†. Пусть оныя будутъ К, G. И пусть еще взяты будутъ I, H такія, чтобы разнствовала К отъ I равно какъ I отъ Н, и какъ Н отъ G (43). И вообразимъ, какъ и прежде, въ кругѣ ABCD вписанный многоугольникъ, коего число сторонъ дѣлимо на четыре, и другой описанный, подобный вписанному, такіе, чтобы сторона многоугольника описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣла мень-
†4. шее отношеніе, нежели К къ I†; и пусть поперечники AC, BD будутъ взаимно подъ прямыми углами. Посему, естьли около неподвижнаго поперечника AC оборотимъ плоскость многоугольниковъ: то въ шарѣ впишется фигура и около него опишется другая; и описанная къ вписанной будетъ имѣть утроенное отношеніе стороны многоугольника описаннаго около круга ABCD, къ сторонѣ въ
†34. немъ вписаннаго.† Но сторона къ сторонѣ имѣетъ меньшее отношеніе, нежели К къ I: посему фигура описанная къ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели утроенное прямыя К къ I. Но К

къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели утроенное прямыя K къ I (44), какъ явствуетъ изъ леммъ (45): а посему фигура описанная къ вписанной тѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели K къ G. А K къ G имѣетъ меньшее отношеніе, нежели шаръ къ конусу O (46); такожъ и премѣненіемъ: что невозможно. Ибо фигура описанная больше шара, а вписанная меньше конуса O+: потому что конусъ O есть четырекратный конуса, имѣющаго основаніе равное кругу ABCD, а высоту равную радіусу шара, фигура же вписанная меньше нежели четырекратная сего же конуса. Итакъ шаръ не больше, нежели четырекратный помянутаго конуса.

Но пусть, естьли возможно, будетъ онъ меньше нежели четырекратный того конуса: посему шаръ меньше конуса O. Возьми прямыя K, G такія, чтобы K, будучи больше G, имѣла къ ней меньшее отношеніе, нежели конусъ O къ шару; и изложи таковыя же, какъ и въ первомъ разѣ, прямыя H, I; и вообрази вписанный многоугольникъ въ кругѣ ABCD и около него описанный другой, такіе, чтобы сторона описаннаго къ сторонѣ вписан-

наго имѣла меньшее отношеніе, нежели К къ I; и пусть прочее будетъ состроено, какъ въ первомъ случаѣ. Итакъ тѣлесная фигура описанная къ вписанной имѣетъ утроенное отношеніе стороны многоугольника описаннаго около круга ABCD, къ сторонѣ вписаннаго въ немъ. А сторона къ сторонѣ имѣетъ меньшее отношеніе, нежели К къ I: посему фигура описанная къ вписанной будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели утроенное прямыя К къ I. Но К къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели утроенное прямыя К къ I (44): посему фигура описанная къ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели и К къ G. А К къ G имѣетъ меньшее отношеніе, нежели конусъ О къ шару, что невозможно: ибо фигура вписанная меньше шара, а описанная больше конуса О. Итакъ шаръ не меньше, нежели четырекратный конуса, имѣющаго основаніе равное кругу ABCD, а высоту равную радіусу шара. Доказано же, что и не больше: слѣдственно онъ четырекратный.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Доказавъ сіе, явно, что всякій цилиндръ,

имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту равную его поперечнику, есть полуторный шара: и что поверхность его, купно съ основаніями, есть полуторная поверхности шара.

Ибо помянутый цилиндръ есть шестикратный конуса, имѣющаго тоже основаніе, а высоту равную радіусу шара*; а *10, XII.
шаръ, по доказанному, есть четырекратный сего конуса†: изъ сего слѣдуетъ, что †36.
цилиндръ есть полуторный шара.

Еще же, поелику поверхность цилиндра, кромѣ основаній, равна, по доказанному, кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между стороною цилиндра и поперечникомъ основанія†; и †14.
сторона сказаннаго цилиндра, какъ описаннаго около шара, равна поперечнику основанія: то слѣдуетъ, что оная средняя пропорціональная равна поперечнику основанія. Но кругъ, имѣющій радіусъ равный поперечнику основанія, есть четырекратный сего основанія, то есть четырекратный наибольшаго круга шара: посему поверхность цилиндра, кромѣ основаній, есть четырекратная наибольшаго круга: а посему цѣлая поверхность цилиндра, купно съ основаніями, есть шести-

кратная наибольшаго круга. Поверхность же шара есть четырекратная наибольшаго круга: итакъ цѣлая поверхность цилиндра есть полуторная поверхности шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVIII.

Поверхность фигуры вписанной въ отрѣзкѣ шара, равна кругу, изъ радіуса коего квадратъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ сторонѣ многоугольника вписаннаго въ отрѣзкѣ наибольшаго круга, и въ прямой равной всѣмъ къ основанію параллельнымъ купно съ половиною основанія отрѣзка.

Пусть будетъ шаръ, и его отрѣзокъ, имѣющій основаніе кругъ написанный около AG. Впиши въ семъ отрѣзкѣ, какъ уже было сказано, фигуру содержимую въ коническихъ поверхностяхъ. И пусть будетъ AGH наибольшій кругъ, и ACEHFDG четносторонный многоугольникъ, кромѣ стороны AG. И возьми кругъ L, изъ коего радіуса квадратъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ сторонѣ AC, и во всѣхъ прямыхъ EF, CD купно съ половиною основанія, то есть съ AK. Надлежитъ доказать, что кругъ L равенъ поверхности фигуры вписанной.

Возьми кругъ M, изъ радіуса коего квад-
ратъ равенъ прямоугольнику, содержи-
мому въ сторонѣ EH и въ половинѣ пря-
мой EF: посему кругъ M равенъ поверх-
ности конуса, коего основаніе кругъ око-
ло EF, а вершина точка H†. Возьми также †15.
другой кругъ N, изъ радіуса коего квад-
ратъ равенъ прямоугольнику, содержи-
мому въ EC и въ половинѣ прямыхъ EF, CD†: †17.
то кругъ сей будетъ равенъ поверхности
конуса, которая между параллельными
плоскостями проходящими чрезъ EF, CD.
Возьми еще кругъ O, изъ радіуса коего
квадратъ равенъ прямоугольнику содер-
жимому въ AC и въ половинѣ прямыхъ
CD, AG: то и сей будетъ равенъ кони-
ческой поверхности, что между парал-
лельными плоскостями проходящими чрезъ
AG, CD. Итакъ всѣ круги будутъ равны
цѣлой поверхности фигуры; а квадраты
изъ радіусовъ ихъ, прямоугольнику содер-
жимому въ одной сторонѣ AC и въ пря-
мой равной прямымъ EF, CD и половинѣ
основанія, то есть AK. Но и квадратъ
изъ радіуса круга L положенъ равнымъ
сему же прямоугольнику: посему кругъ L
равенъ кругамъ M, N, O, слѣдственно и
поверхности фигуры вписанной.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIX.

Пусть разсѣчется шаръ плоскостію не проходящею чрезъ центръ; и AEF будетъ наибольшій кругъ его, пресѣкающій ту сѣкущую плоскость подъ прямыми углами; и пусть въ отрѣзкѣ ABC впишется многоугольникъ, равносторонный и четносторонный, кромѣ основанія AB: то, подобно какъ и прежде, естьли около неподвижнаго поперечника CF оборотится многоугольникъ; углы D, E, A, B напишутъ круги, коихъ поперечники DE, AB, а стороны многоугольника напишутъ коническія поверхности; и такимъ образомъ произойдетъ тѣлесная фигура, содержимая въ коническихъ поверхностяхъ, имѣющая основаніе кругъ написанный около AB, а вершину въ точкѣ C. Сія фигура, подобно какъ и прежде, будетъ имѣть поверхность меньше поверхности отрѣзка, оную объемлющей: ибо какъ отрѣзокъ такъ и фигура имѣютъ края на окружности тогоже круга, написаннаго около поперечника AB; и обѣ сіи поверхности выпуклы съ тойже стороны; и одна другою объемлется.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XL.

Поверхность фигуры вписанной въ отрѣзкѣ шара, меньше круга, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности основанія его.

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ ABΓE; и пусть сего шара будетъ отрѣзокъ, имѣющій основаніе кругъ написанный около поперечника AB; и въ отрѣзкѣ пусть вписана будетъ сказанная фигура, вписавъ въ отрѣзкѣ круга многоугольникъ, сдѣлавъ все прочее какъ прежде, и проведя въ шарѣ поперечникъ HL, и еще протянувъ LE, HA; и пусть будетъ M кругъ, коего радіусъ равенъ AH. Надлежитъ доказать, что кругъ M больше поверхности фигуры.

Поелику поверхность фигуры, по доказанному, равна кругу, изъ радіуса коего квадратъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ EH и въ EF, CD, KA+; и доказано также, что прямоугольникъ содержимый въ EH и въ EF, CD, KA, равенъ прямоугольнику въ EL, KH+*; прямоугольникъ же въ EL, KH меньше квадрата изъ AH, ибо меньше прямоугольника въ LH, HK, равнаго квадрату изъ HA (47): по- +38. + 23, и * 16, VI.

сему явно, что радіусъ круга равнаго поверхности фигуры вписанной, меньше радіуса круга M. Слѣдовательно кругъ M больше поверхности фигуры.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLI.

Фигура въ отрѣзкѣ вписанная, содержимая въ коническихъ поверхностяхъ, купно съ конусомъ, имѣющимъ основаніе тоже что и фигура, а вершину въ центрѣ шара, равна конусу, имѣющему основаніе равное поверхности фигуры, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра шара къ сторонѣ многоугольника проведенному.

Пусть будетъ шаръ, наибольшій его кругъ, и отрѣзокъ ABC меньшій полукружія, и центръ E; и пусть будетъ, подобно какъ и въ прежнихъ случаяхъ, вписанъ многоугольникъ четносторонный, кромѣ AC; и чрезъ обращеніе его около неподвижной BE, въ шарѣ произведена фигура, содержимая въ коническихъ поверхностяхъ; и надъ кругомъ, коего поперечникъ AC, пусть написанъ будетъ конусъ, имѣющій вершину въ центрѣ шара; и пусть будетъ конусъ K, коего основаніе равно поверхности фигуры,

а высота равна перпендикуляру, отъ центра E къ сторонѣ многоугольника проведенному. Надлежитъ доказать, что конусъ K равенъ помянутой фигурѣ купно съ конусомъ AEC.

На кругахъ, коихъ поперечники GH, FL, вообразимъ два конуса, имѣющіе вершину въ точкѣ E. Итакъ, ромбоидальное тѣло GBHE равно конусу, коего основаніе равно поверхности конуса GBH, а высота равна перпендикуляру, отъ E къ GB проведенному†; остатокъ же, со- † 19.
держимый въ поверхности, что между параллельныхъ плоскостей проходящихъ чрезъ GH, FL, и въ коническихъ поверхностяхъ FEL, GEH, равенъ конусу, коего основаніе равно поверхности, что между параллельныхъ плоскостей проходящихъ чрезъ GH, FL, а высота равна перпендикуляру, отъ E къ FG проведенному†; а остатокъ содержимый въ поверх- † 20.
ности, что между параллельныхъ плоскостей проходящихъ чрезъ FL, AC, и въ коническихъ поверхностяхъ AEC, FEL, равенъ конусу, коего основаніе равно поверхности, что между параллельныхъ плоскостей проходящихъ чрезъ FL, AC, а высота равна перпендикуляру, отъ

Е къ FA проведенному: посему всѣ сказанные конусы равны фигурѣ вписанной, и купно конусу АЕС. И поелику они имѣютъ высоту равную перпендикуляру, отъ Е къ одной изъ сторонъ многоугольника проведенному, и основанія равныя поверхности фигуры AFGBHLC; а и конусъ К имѣетъ тужъ высоту, и основаніе равное поверхности оной фигуры: посему конусъ К равенъ помянутымъ конусамъ. Помянутые же конусы равны, по доказанному, фигурѣ купно съ конусомъ АЕС: чего ради конусъ К равенъ фигурѣ вписанной, и купно конусу ЕАС.

Отсюда явствуетъ, что конусъ, имѣющій основаніе кругъ, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины отрѣзка до его основанія, а высоту равную радіусу шара, есть больше фигуры вписанной, купно съ конусомъ АЕС. Ибо преждесказанный конусъ больше конуса равнаго фигурѣ вписанной купно съ конусомъ, имѣющимъ тоже основаніе что и отрѣзокъ, а вершину въ центрѣ шара, то есть больше конуса, имѣющаго основаніе равное поверхности фигуры вписанной, а высоту равную перпендикуляру,

отъ центра къ сторонѣ многоугольника проведенному: поелику основаніе перваго, по доказанному, больше основанія послѣдняго+, а высота перваго больше высоты послѣдняго. +40.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLII.

Пусть будетъ шаръ, его наибольшій кругъ ABC, и прямая AB отнимающая отрѣзокъ меньшій полукружія, и точка D центръ; и пусть будутъ отъ центра D до A, B протянуты AD, DB, и описаны около произшедшаго вырѣзка многоугольникъ, а около него кругъ, то сей будетъ имѣть тотъже центръ что и кругъ ABC. И ежели около неподвижнаго поперечника EK оборотимъ многоугольникъ, пока онъ возставится тамъ откуда началось его обращеніе: то описанный кругъ перенесется по поверхности шара; углы многоугольника напишутъ круги, коихъ поперечники суть прямыя, параллельныя къ AB, сопрягающія углы многоугольника; точки, въ коихъ стороны многоугольника касаются къ меньшему кругу, напишутъ на меньшемъ шарѣ круги, коихъ поперечники суть прямыя, параллельныя къ AB, соединящія точки

касанія; а стороны перенесутся по коническимъ поверхностямъ. Такимъ образомъ опишется фигура, содержимая въ коническихъ поверхностяхъ, коея основаніе кругъ около FG. Поверхность сказанной фигуры есть больше поверхности меньшаго отрѣзка, коего основаніе кругъ около AB.

Ибо проведи касательныя AM, BN: то оныя перенесутся по конической поверхности; фигура же произведенная обращеніемъ многоугольника AMHELNB будетъ имѣть поверхность больше поверхности шароваго отрѣзка, коего основаніе кругъ около поперечника AB: поелику обѣ имѣютъ края на тойже плоскости, на кругѣ написанномъ около поперечника AB, и отрѣзокъ объемлется фигурою. Но поверхность конуса произведенная прямыми FM, GN, больше произведенной прямыми MA, NB: ибо прямая FM больше MA, какъ противулежащая прямому углу, и NG больше NB; [а когда сіе бываетъ, то и поверхность больше поверхности (48), какъ сіе доказано въ леммахъ] Изъ сего слѣдуетъ, что поверхность описанной фигуры, больше поверхности отрѣзка меньшаго шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIII.

Еще же явствуетъ, что поверхность фигуры описанной около шароваго вырѣзка (49), равна кругу, изъ радіуса коего квадратъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ одной изъ сторонъ многоугольника и во всѣхъ соединяющихъ его углы прямыхъ, купно съ половиною основанія сего многоугольника.

Ибо фигура описанная около вырѣзка, есть вписанная въ отрѣзкѣ большаго шара; и потому сіе слѣдуетъ изъ вышеписаннаго*. *38.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIV.

Поверхность фигуры описанной около вырѣзка, больше круга, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности основанія его.

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ ADBC, и центръ E; и пусть будетъ описанъ около вырѣзка многоугольникъ LFK, и около него кругъ, и произведена фигура, какъ и прежде. Пусть еще будетъ кругъ N, изъ радіуса коего квадратъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ одной изъ сторонъ многоуголь-

ника и во всѣхъ соединяющихъ его углы прямыхъ, купно съ половиною прямой KL. И поелику сказанный прямоугольникъ равенъ, по доказанному прежде, прямо-
†23. угольнику въ MH и въ FG†, которая есть высота отрѣзка шара большаго: то квадратъ изъ радіуса круга N равенъ прямоугольнику въ MH, GF. Но GF больше DO, которая есть высота меньшаго отрѣзка: ибо протянувъ KF, она будетъ параллельна къ DA, а и AB параллельна къ KL, и FE есть общая: посему треугольникъ FKG подобенъ треугольнику DAO, и слѣдственно, по причинѣ что
6, VI. FK больше AD, и FG есть больше DO. А MH равна поперечнику CD. Ибо соединивъ точки E, P, поелику MP равна PF
2, VI. и HE равна EF, то EP параллельна къ MH;
d, VI. посему MH есть двукратная прямой EP; а и CD есть двукратная же прямой EP, слѣдственно MH равна CD (50). Притомъ прямоугольникъ въ CD, DO равенъ квадрату изъ AD. (51). Чего ради поверхность фигуры KFL есть больше круга, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности основанія его, то есть до окружности круга написаннаго около поперечника AB:

ибо кругъ N равенъ поверхности фигуры описанной около вырѣзка.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLV.

Фигура описанная около вырѣзка, купно съ конусомъ, имѣющимъ основаніе кругъ написанный около поперечника KL, а вершину въ центрѣ шара, равна конусу, коего основаніе равно поверхности фигуры, а высота равна перпендикуляру, отъ центра къ сторонѣ многоугольника проведенному, который равенъ радіусу шара.

Ибо фигура описанная около вырѣзка, есть также и вписанная въ отрѣзкѣ большаго шара, коего центръ тотъже: и потому сіе слѣдуетъ изъ вышеписаннаго†. †41.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVI.

А изъ сего явствуетъ, что фигура описанная, купно съ конусомъ, есть больше конуса, имѣющаго основаніе кругъ, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины отрѣзка меньшаго шара, до окружности основанія сего отрѣзка, а высоту равную радіусу шара.

Ибо конусъ, равный описанной фигурѣ

и купно конусу, будетъ имѣть основаніе
+40, и 45. больше сказаннаго круга+, а высоту равную радіусу меньшаго шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVII.

Пусть опять будетъ шаръ, и наибольшій его кругъ, и отрѣзокъ ABC меньшій полукружія, и центръ D; и пусть въ вырѣзкѣ ABC впишется многоугольникъ четноугольный, и около него же опишется другой подобный первому, такъ чтобы стороны къ сторонамъ были паралельны, и около описаннаго многоугольника опишется кругъ: то, подобно какъ и прежде, чрезъ обращеніе круговъ около неподвижной DB, произведутся фигуры содержимыя въ коническихъ поверхностяхъ. Надлежитъ доказать, что поверхность фигуры описанной къ поверхности фигуры вписанной имѣетъ удвоенное отношеніе стороны многоугольника описаннаго къ сторонѣ вписаннаго; а самая фигура купно съ конусомъ, имѣетъ утроенное отношеніе тѣхъже сторонъ.

Ибо пусть будетъ M кругъ, изъ радіуса коего квадратъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ одной изъ сторонъ многоугольника описаннаго, и во всѣхъ сое-

диняющихъ его углы прямыхъ, купно съ половиною прямой EF: то кругъ M будетъ равенъ поверхности фигуры описанной+; и пусть будетъ N другой кругъ, +43.
изъ радіуса коего квадратъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ одной изъ сторонъ многоугольника вписаннаго и во всѣхъ діагоналяхъ, купно съ половиною прямой AC: то сей кругъ равенъ будетъ поверхности фигуры вписанной+. Но по- +38.
мянутые прямоугольники суть взаимно какъ квадраты изъ EK и AL (52): посему какъ многоугольникъ къ многоугольнику, такъ кругъ M къ кругу N*. Итакъ явно, *11, VII
что поверхность фигуры описанной къ 22, VI.
поверхности фигуры вписанной, имѣетъ удвоенное отношеніе прямыя EK къ AL: то есть тоже, что и многоугольники.

Теперь пусть будетъ O конусъ, имѣющій основаніе равное кругу M, а высоту равную радіусу меньшаго шара: посему сей конусъ равенъ фигурѣ описанной, купно съ конусомъ, коего основаніе кругъ около EF, а вершина въ D+; и пусть +45.
еще будетъ P другой конусъ, имѣющій основаніе равное кругу N, а высоту равную перпендикуляру, отъ D къ AL проведенному: посему и сей конусъ будетъ

равенъ фигурѣ вписанной, купно съ конусомъ, коего основаніе кругъ около по-
†41. перечника АС, а вершина въ центрѣ D†. Все сіе уже показано было. И поелику какъ ЕК къ радіусу меньшаго шара, такъ AL къ перпендикуляру, отъ D къ AL проведенному; доказано же, что какъ ЕК къ AL, такъ радіусъ круга М къ радіусу круга N (53), и такъ поперечникъ къ поперечнику: посему какъ поперечникъ круга, который есть основаніе конуса О, къ поперечнику круга, который есть основаніе конуса Р, такъ высота конуса О къ высотѣ конуса Р. Слѣдственно конусы
* оп. 24, XI. подобны*: посему конусъ О къ конусу Р имѣетъ утроенное отношеніе попереч-
* 12, XII. ника къ поперечнику*. Итакъ явно, что и фигура описанная, купно съ конусомъ, къ фигурѣ вписанной, купно съ конусомъ, имѣетъ утроенное отношеніе прямыя ЕК къ AL.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVIII.

Поверхность всякаго шароваго отрѣзка, меньшаго половины шара, равна кругу, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности основанія его.

Пусть будетъ шаръ, и наибольшій его кругъ ABC, и отрѣзокъ, меньшій полушарія, коего основаніе кругъ около AC, перпендикулярный къ кругу ABC; и пусть будетъ F кругъ, коего радіусъ равенъ AB. Надлежитъ доказать, что поверхность отрѣзка ABC равна кругу F.

Ибо, естьли не равна, то пусть поверхность будетъ больше круга F. Возьми центръ D; и протянувъ отъ D до A, C прямыя, продолжи оныя; и по двумъ неравнымъ величинамъ, поверхности отрѣзка и кругу F, впиши въ вырѣзкѣ ABC многоугольникъ равносторонный и четноугольный, и опиши около него же другой подобный первому, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели поверхность отрѣзка шара къ кругу†; и чрезъ обращеніе круга ABC, 16.
какъ и прежде, произведи двѣ фигуры, содержимыя въ коническихъ поверхностяхъ, одну описанную, а другую вписанную. Итакъ поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной будетъ имѣть тоже отношеніе, что и многоугольникъ описанный къ вписанному: ибо и тѣ и другіе суть взаимно въ удвоенномъ отношеніи стороны многоугольника описан-

+47, I; и *20, VI. наго къ сторонѣ вписаннаго+*. Но многоугольникъ описанный къ вписанному имѣетъ меньшее отношеніе, нежели поверхность сказаннаго отрѣзка къ кругу F (54); и поверхность фигуры описанной больше поверхности отрѣзка+: посему поверх-
+42. ность фигуры вписанной больше круга F; что невозможно (32): ибо доказано, что помянутая фигуры поверхность меньше
+40. круга F+.

Пусть еще кругъ F будетъ больше поверхности. Подобнымъ образомъ опиши и впиши многоугольники подобные, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели кругъ F къ поверхности (55).... Итакъ поверхность отрѣзка не меньше круга F. Доказано же, что и не больше: слѣдственно равна.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIX.

Ежели отрѣзокъ будетъ и больше полушарія: то подобно и его поверхность равна кругу, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности его основанія.

Пусть будетъ шаръ, и наибольшій кругъ; и вообразимъ, что первый разсѣченъ чрезъ AD плоскостію перпендику-

лярною къ другому; и пусть отрѣзокъ ABD будетъ меньшій полушарія, и поперечникъ BC перпендикулярный къ AD; и отъ B, C до A протяни BA, AC. Пусть еще будетъ E кругъ, коего радіусъ равенъ AB, и F кругъ, коего радіусъ равенъ AC, и G кругъ, коего радіусъ равенъ CB.

Итакъ кругъ G равенъ двумъ кругамъ E, F* (37). Но кругъ G равенъ цѣлой поверх- *47, 1.
ности шара, ибо и тотъ и другая четырекратны суть круга написаннаго около поперечника BC+*; и кругъ E равенъ по- +35; и *(22).
верхности отрѣзка ABD, по доказанному объ отрѣзкѣ меньшемъ полушарія†: +48.
посему остальный кругъ F равенъ поверхности отрѣзка ACD, который есть большій полушарія.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ L.

Всякому вырѣзку шара равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное поверхности шароваго отрѣзка, который въ вырѣзкѣ, а высоту равную радіусу шара.

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ ABD, и центръ C; и пусть будетъ конусъ, имѣющій основаніе кругъ равный поверхности что по дугѣ ABD, а высоту равную BC. Надлежитъ доказать, что

вырѣзокъ ABCD равенъ помянутому конусу.

Ибо, естьли не равенъ, то пусть вырѣзокъ будетъ больше конуса; и пусть сказанный конусъ будетъ H. И по двумъ неравнымъ величинамъ, вырѣзку и конусу H, сыщи двѣ линіи D, E, изъ коихъ D большая, такія, чтобы D къ E имѣла меньшее отношеніе, нежели вырѣзокъ къ
✝3. конусу✝. И возьми двѣ линіи F, G такія, чтобы разнствовала D отъ F равно какъ F отъ G, и какъ G отъ E (43); и на плоскости круга опиши около вырѣзка его многоугольникъ равносторонный и четноугольный, и въ немъ же впиши другой сему подобный, такіе, чтобы сторона описаннаго къ сторонѣ вписаннаго
✝5. имѣла меньшее отношеніе, нежели D къ F✝; и, подобно какъ прежде, чрезъ обращеніе круга произведи двѣ фигуры содержимыя въ коническихъ поверхностяхъ. Итакъ фигура описанная, купно съ конусомъ имѣющимъ вершину въ точкѣ C, къ вписанной, купно съ ~~тѣмъ же~~ конусомъ, имѣетъ утроенное отношеніе стороны многоугольника описаннаго къ сторонѣ вписаннаго
✝47. саннаго✝. Но сторона описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣетъ меньшее отно-

шеніе, нежели D къ F: посему сказанныя тѣлесныя фигуры, описанная къ вписанной*, имѣютъ меньшее отношеніе, нежели утроенное прямыя D къ F. Но D къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели утроенное прямыя D къ F (44): посему тѣлесная фигура описанная около вырѣзка, къ фигурѣ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели и D къ E. А D къ E имѣетъ меньшее отношеніе, нежели тѣлесный вырѣзокъ къ конусу H: посему тѣлесная фигура описанная около вырѣзка, къ фигурѣ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели тѣлесный вырѣзокъ къ конусу H; такожъ и премѣненіемъ. Но тѣлесная фигура описанная больше вырѣзка: посему и фигура вписанная въ вырѣзкѣ больше конуса H; что невозможно (32). Ибо доказано въ прежнихъ случаяхъ, что она меньше таковаго конуса, то есть, имѣющаго основаніе кругъ, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности его основанія, а высоту равную радіусу шара+: а таковый есть помянутый конусъ H, поелику имѣетъ основаніе равное поверхности отрѣзка, то есть сказанному кругу, а высоту равную радіусу

+41.

шара. Чего ради тѣлесный вырѣзокъ не больше конуса H.

Но пусть конусъ H будетъ больше тѣлеснаго вырѣзка; и пусть опять D къ E, изъ коихъ D большая, имѣетъ меньшее отношеніе, нежели конусъ къ вырѣзку. Возьми опять F, G такія же; и пусть сторона около плоскаго вырѣзка описаннаго четноугольнаго многоугольника, къ сторонѣ вписаннаго имѣетъ меньшее отношеніе, нежели D къ F; и около тѣлеснаго вырѣзка произведи тѣлесныя фигуры: то подобно докажемъ, что фигура описанная около тѣлеснаго вырѣзка, къ фигурѣ въ немъ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели D къ E, и нежели конусъ H къ вырѣзку. Слѣдственно и вырѣзокъ къ конусу имѣетъ меньшее отношеніе, нежели фигура въ тѣлесномъ отрѣзкѣ вписанная, къ фигурѣ около него описанной. Но вырѣзокъ больше фигуры въ немъ вписанной: посему конусъ H больше фигуры описанной, что невозможно; ибо доказано, что таковый конусъ меньше фигуры описанной около вырѣзка. Итакъ вырѣзокъ равенъ конусу H. (56).

АРХИМЕДА
О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ.

КНИГА II.

Архимедъ Досиѳея привѣтствуетъ!

Ты просилъ меня написать доказательства задачамъ, которыхъ предложенія послалъ я къ Конону. Большая часть оныхъ произтекаетъ изъ ѳеоремъ, коихъ доказательства уже посланы къ тебѣ, какова, на примѣръ, слѣдующая: Поверхность всякаго шара есть четырекратная наибольшаго его круга; или сія: Поверхность всякаго шароваго отрѣзка равна кругу, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности его основанія; или еще: Всякій цилиндръ, имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту равную его поперечнику, величиною есть полу-

торный шара, и поверхностію также есть полуторный поверхности шара; или и слѣдующая: Всякій тѣлесный вырѣзокъ равенъ конусу, имѣющему основаніе кругъ равный поверхности шароваго отрѣзка, который въ вырѣзкѣ, а высоту равную радіусу шара. Въ книгѣ, которую къ тебѣ препровождаю, ты найдешь всѣ ѳеоремы и задачи, изъ тѣхъ ѳеоремъ произтекающія. Что же касается до находимыхъ изъ другихъ основаній, кои относятся къ спиралямъ и коноидамъ, то я постараюсь прислать оныя къ тебѣ сколько возможно скорѣе.

Первая изъ задачь была слѣдующая:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

По данному шару, найти плоское пространство, равное поверхности онаго шара.

Сіе явствуетъ, какъ слѣдствіе одной изъ вышесказанныхъ ѳеоремъ: ибо четырекратный наибольшій кругъ шара, есть плоское пространство, и притомъ равное
+35, 1. поверхности шара+.

Вторая же была сія:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

По данному конусу или цилиндру, найти шаръ, равный сему конусу или цилиндру.

Пусть будетъ А данный конусъ или цилиндръ, и ему равный шаръ В; и пусть будетъ цилиндръ CFD полуторный цилиндра или конуса А (57), и другой цилиндръ, полуторный шара В, коего основаніе кругъ около поперечника GH, а ось KL равная поперечнику шара†. Итакъ †37, I.
цилиндръ Е равенъ цилиндру К. А равныхъ цилиндровъ основанія обратно пропорціональны высотамъ: посему какъ кругъ Е къ кругу К, то есть квадратъ изъ CD къ квадрату изъ GH, такъ KL къ EF. Но KL равна GH, ибо цилиндръ полуторный шара, имѣетъ ось равную его поперечнику†; и К есть наибольшій †37, I.
кругъ шара: посему какъ квадратъ изъ CD къ квадрату изъ GH, такъ GH къ EF. Пусть квадрату изъ GH будетъ равенъ прямоугольникъ въ CD, MN: посему какъ CD къ MN, такъ квадратъ изъ CD къ квадрату изъ GH*, то есть, такъ GH къ *сл. 2: 20, VI.
EF*; и премѣненіемъ (58), какъ CD къ GH, *11, V.

такъ GH къ MN, и такъ MN къ EF. Но каждая изъ прямыхъ CD, EF дана: посему данныя суть между CD, EF двѣ среднія пропорціональныя GH, MN; чего ради и каждая изъ прямыхъ GH, MN есть данная (59).

Задача сія построится слѣдующимъ образомъ: Пусть будетъ A данный конусъ или цилиндръ. Надлежитъ найти шаръ, равный конусу или цилиндру A.

Пусть будетъ конуса или цилиндра A полуторный цилиндръ, коего основаніе кругъ около поперечника CD, а ось EF. (57). Между CD, EF возьми двѣ среднія пропорціональныя GH, MN, такъ чтобъ было, какъ CD къ GH, такъ GH къ MN, и такъ MN къ EF (60); и вообрази цилиндръ, коего основаніе кругъ около поперечника GH, а ось KL равная поперечнику GH. Говорю, что цилиндръ E равенъ цилиндру K.

Поелику какъ CD къ GH, такъ MN къ EF; премѣненіемъ же и по причинѣ что GH равна KL, какъ CD къ MN (61), то есть какъ квадратъ изъ CD къ квадрату изъ GH, такъ кругъ E къ кругу K: посему какъ кругъ E къ кругу K, такъ KL къ EF. Чего ради основанія E, K цилиндровъ суть обратно пропорціональ-

ны высотамъ: и потому цилиндръ E равенъ цилиндру K*. Но цилиндръ K есть полуторный шара, коего поперечникъ GH: посему шаръ, коего поперечникъ равенъ GH, то есть шаръ B, равенъ конусу или цилиндру A. *15, XII.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Всякому отрѣзку шара равенъ конусъ, имѣющій тоже съ отрѣзкомъ основаніе, а высоту такую прямую, которая къ высотѣ отрѣзка имѣетъ тоже отношеніе, что радіусъ шара купно съ высотою остальнаго отрѣзка, къ высотѣ сего отрѣзка.

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ, имѣющій поперечникъ AC; и пусть шаръ чрезъ BF разсѣкается плоскостію перпендикулярною къ AC, и центръ его будетъ H; и сдѣлаемъ, какъ HA, AE къ AE, такъ DE къ CE*; и еще сдѣлаемъ, какъ HC, CE къ CE, такъ KE къ EA; и надъ кругомъ что около поперечника BF, напишемъ два конуса, имѣющіе вершины въ точкахъ K, D. Говорю, что конусъ BDF равенъ шаровому отрѣзку, который со стороны C, а конусъ BKF тому, который со стороны точки A. *12, VI.

Протяни BH, HF; и вообрази конусъ, имѣющій основаніе кругъ, что около поперечника BF, а вершину въ точкѣ H. Пусть будетъ еще конусъ M, имѣющій основаніе, равное поверхности шароваго отрѣзка BFC, то есть кругъ, коего радіусъ равенъ прямой BC, а высоту равную радіусу шара: посему конусъ M равенъ тѣлесному вырѣзку BCHF, по до-
+50, I. казанному въ первой книгѣ+. И поелику какъ DE къ EC, такъ HA, AE къ AE: то будетъ, отдѣленіемъ, какъ CD къ CE,
17, V. такъ HA къ AE, то есть такъ CH къ AE; а премѣненіемъ, какъ CD къ CH, такъ
16, V. CE къ EA; и совокупленіемъ, какъ HD
18, V. къ HC, такъ CA къ AE, то есть такъ квадратъ изъ CB къ квадрату изъ BE (62). Чего ради какъ DH къ CH, такъ квадратъ изъ CB къ квадрату изъ BE. Но CB равна радіусу круга M, а BE есть радіусъ
7, XII, V. круга, что около поперечника BF: посему какъ DH къ HC, такъ кругъ M къ кру-
7, XII, V. гу что около поперечника BF. Но HC равна оси конуса M: посему какъ DH къ оси конуса M, такъ кругъ M къ кругу около поперечника BF: чего ради конусъ, имѣющій основаніе кругъ M, а высоту радіусъ шара, равенъ тѣлесному ромбу BDFH,

по доказанному въ леммахъ первой книги*. *въ 17, I.

Или и такъ: Поелику какъ DH къ высотѣ конуса M, такъ кругъ M къ кругу около поперечника BF: то конусъ M равенъ конусу, коего основаніе кругъ около поперечника BF, а высота DH; ибо основанія ихъ обратно пропорціональны высотамъ. Но конусъ, имѣющій основаніе кругъ около поперечника BF, а высоту DH, равенъ тѣлесному ромбу BDFH: посему и конусъ M равенъ тѣлесному ромбу BDFH. Конусъ же M равенъ и тѣлесному вырѣзку BCFH: посему и вырѣзокъ BCFH равенъ тѣлесному ромбу BDFH. Итакъ, по отнятіи общаго конуса, коего основаніе кругъ около поперечника BF, а высота EH, будетъ остальной конусъ BDF равенъ шаровому отрѣзку BFC.

Подобно докажется, что и конусъ BKF равенъ шаровому отрѣзку BAF. И дѣйствительно, поелику какъ HC, CE къ CE, такъ KE къ EA: то отдѣленіемъ, какъ KA къ AE, такъ HC къ CE. Но HC равна HA: посему, и премѣненіемъ, какъ KA къ AH, такъ AE къ EC; слѣдственно совокупленіемъ, какъ KH къ HA, такъ AC къ CE, то есть такъ квадратъ изъ BA къ квадрату изъ BE. Изложи еще кругъ N, имѣю-

щій радіусъ равный AB, то кругъ N равенъ будетъ поверхности отрѣзка BAF; и вообрази конусъ N, имѣющій высоту равную радіусу шара, то сей конусъ будетъ равенъ тѣлесному вырѣзку BHFA: то и другое, по доказанному въ первой
+49 и 50, I. книгѣ+. И поелику доказано, что какъ KH къ HA, такъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ BE, то есть такъ квадратъ изъ радіуса круга N къ квадрату изъ радіуса круга, что около поперечника BF, то есть такъ кругъ N къ кру-
15, V. и 2, XII. гу около поперечника BF; и AH равна высотѣ конуса N: посему какъ KH къ высотѣ конуса N, такъ кругъ N къ кругу около поперечника BF; чего ради конусъ N (63), то есть вырѣзокъ BHFA, равенъ фигурѣ BHFK. Придай обще конусъ, коего основаніе кругъ около поперечника BF, а высота EH: посему цѣлый шаровый отрѣзокъ ABF равенъ конусу BFK. Что и доказать надлежало.

Отсюда явствуетъ, что вообще какъ отрѣзокъ шара къ конусу, имѣющему тоже основаніе и туже высоту, что отрѣзокъ, такъ радіусъ шара купно съ высотою остальнаго отрѣзка, къ высо-

тѣ сего отрѣзка: ибо какъ DE къ EC, такъ конусъ DFB, то есть отрѣзокъ BFC, къ конусу BCF.

Предположивъ тѣже условія, мы иначе докажемъ, что конусъ KBF равенъ шаровому отрѣзку AFB. Пусть будетъ конусъ N, имѣющій основаніе равное поверхности шара, а высоту равную радіусу. Итакъ сей конусъ равенъ шару: ибо шаръ, по доказанному, есть четырекратный конуса, имѣющаго основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту его радіусъ+; а и конусъ N есть четырекратный сказаннаго конуса, потому что основаніе есть четырекратное основанія, равно какъ и поверхность шара четырекратна наибольшаго его круга+. И поелику какъ HA, AE къ AE, такъ DE къ EC; то отдѣленіемъ и премѣненіемъ, какъ HC къ CD, такъ AE къ EC. Еще же, поелику какъ KE къ EA, такъ HC, CE къ CE; то отдѣленіемъ и премѣненіемъ, какъ KA къ CH то есть HA, такъ AE къ EC*, то есть HC къ CD, также и совокупленіемъ. Но AH равна HC: посему какъ KH къ HC, такъ HD къ DC; и какъ цѣлая KD къ DH, такъ DH къ DC*, то

+36, г. +35, г. *17 и 16, г. *16 и 18, г.

есть такъ KH къ HA. Чего ради прямоугольникъ въ DH, HK равенъ прямоуголь-
16, VI. нику въ DK, HA. Еще же, поелику какъ KH къ HC, такъ HD къ CD; то премѣненіемъ, какъ KH къ HD, такъ HC къ CD. А какъ HC къ CD, такъ, по доказанному, AE къ EC: посему какъ KH къ HD, такъ AE къ EC; а посему какъ квадратъ изъ KD къ прямоугольнику въ KH, HD, такъ квадратъ изъ AC къ прямоугольнику въ AE, EC (64). Доказано же, что прямоугольникъ въ KH, HD равенъ прямоугольнику въ KD, AH: посему какъ квадратъ изъ KD къ прямоугольнику въ
1, VI. KD, AH, то есть какъ KD къ AH, такъ квадратъ изъ AC къ прямоугольнику въ
17, VI. AE, EC, то есть къ квадрату изъ EB. Но AC равна радіусу круга N: посему какъ квадратъ изъ радіуса круга N къ квадрату изъ BE, то есть какъ кругъ N къ кругу около поперечника BF, такъ KD къ AH, то есть такъ KD къ высотѣ конуса N. Чего ради конусъ N, то есть шаръ,
15, XII. равенъ тѣлесному ромбу BDFK. Или и такъ: Посему какъ кругъ N къ кругу около поперечника BF, такъ прямая KD къ высотѣ конуса N: чего ради конусъ N равенъ конусу, коего основаніе кругъ около по-

перечника BF, а высота DK, ибо основанія ихъ обратно пропорціональны высотамъ. Но сей конусъ равенъ тѣлесному ромбу BKFD*: посему и конусъ N, то есть шаръ, равенъ тѣлесному ромбу BKFD, составленному изъ конусовъ BDF, BKF.— Изъ нихъ конусъ BDF равенъ, по доказанному, шаровому отрѣзку BCF: посему остальный конусъ BKF равенъ шаровому отрѣзку BAF. *14, XII.

Третья задача была слѣдующая:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Раздѣлить данный шаръ плоскостію такъ, чтобы поверхности отрѣзковъ имѣли взаимно данное отношеніе.

Положимъ, что сіе сдѣлано. И пусть будетъ шара наибольшій кругъ ADBE, и его поперечникъ AB, и проведена будетъ плоскость перпендикулярная къ AB; и пусть сія плоскость сдѣлаетъ на кругѣ ADBE сѣченіе DE; и пусть протянуты будутъ AD, BD.

Поелику отношеніе поверхности отрѣзка DAE къ поверхности отрѣзка DBE дано: поверхность же отрѣзка DAE равна кругу, коего радіусъ равенъ AD+, +49, I.

а поверхность отрѣзка DBE кругу, коего
+48, I. радіусъ равенъ DB+; и сказанные круги
суть взаимно какъ квадратъ изъ AD къ
15, V и 2, XII. квадрату изъ DB, то есть какъ AC къ CB
(65): посему отношеніе AC къ CB дано,
слѣдовательно и точка C есть данная.
А поелику къ AB перпендикулярна DE:
посему и плоскость чрезъ DE проходящая,
есть положеніемъ данная.

Задача сія постронтся такъ: Пусть будетъ шаръ, коего наибольшій кругъ ADBE,
и поперечникъ AB; и пусть данное отношеніе будетъ отношеніе F къ G. Разсѣки прямую AB въ точкѣ C такъ, чтобъ
было AC къ CB, какъ F къ G*; и чрезъ
C разсѣки шаръ плоскостію перпендикулярною къ AB, и пусть взаимное сѣченіе
будетъ DE; и протяни AD, DB; и изложи два круга H, K, одинъ, имѣющій
радіусъ равный AD, а другой, равный
DB. Итакъ кругъ H равенъ поверхности
отрѣзка DAE, и кругъ K поверхности
отрѣзка DBE: по доказанному въ первой
+48 и 49, I. книгѣ+. И поелику уголъ ADB ~~данный~~, и
CD перпендикулярная: то какъ AC къ CB,
то есть какъ F къ G, такъ квадратъ
изъ AD къ квадрату изъ DB, то есть

так квадрат изъ радіуса круга H къ квадрату изъ радіуса круга K, то есть такъ кругъ H къ кругу K, то есть такъ поверхность шароваго отрѣзка DAE къ поверхности отрѣзка DBE.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Раздѣлить данный шаръ такъ, чтобы отрѣзки его взаимно имѣли данное отношеніе.

Пусть будетъ данъ шаръ ABCD. Надлежитъ разсѣчь оный плоскостію такъ, чтобы отрѣзки взаимно имѣли данное отношеніе.

Пусть онъ будетъ разсѣченъ чрезъ AC плоскостію: то отношеніе шароваго отрѣзка ADC къ отрѣзку ABC будетъ данное. Разсѣки еще сей шаръ чрезъ центръ, и пусть будетъ сѣченіе найбольшій кругъ ABCD, его центръ K, а поперечникъ DB; и сдѣлай, какъ DK, DX, къ DX, такъ RX къ XB, а какъ KB, BX къ BX, такъ LX къ XD; и протяни AL, LC, AR, RC. Итакъ конусъ ALC равенъ шаровому отрѣзку ADC, а конусъ ARC отрѣзку ABC+: слѣдственно отношеніе ко- +3.
нуса ALC къ конусу ARC будетъ данное. Но какъ конусъ къ конусу, такъ LX къ

XR, ибо имѣютъ тоже основаніе, кругъ около поперечника AC: посему и отношеніе LX къ XR есть данное. Сверхъ того,
†въ 3. по прежнему† изъ строенія будетъ, какъ LD къ KD, такъ KB къ BR, и такъ DX къ XB (66). И поелику какъ RB къ BK, такъ KD къ LD; то совокупленіемъ, какъ RK къ KB, то есть къ KD, такъ KL къ LD: посему какъ цѣлая RL къ цѣлой KL,
*16 и 18, V. такъ KL къ LD. Чего ради прямоугольникъ въ RL, LD равенъ квадрату изъ KL; и потому какъ RL къ LD, такъ квад-
сл. 2: 20; и 22, VI. ратъ изъ KL къ квадрату изъ LD. И поелику какъ LD къ DK, такъ DX къ XB; преложеніемъ же и совокупленіемъ, какъ KL къ LD, такъ BD къ DX: посему и какъ квадратъ изъ KL къ квадрату изъ LD, такъ квадратъ изъ BD къ квадрату
22, VI. изъ DX. Еще же, поелику какъ LX къ DX, такъ KB, BX къ BX: то отдѣленіемъ, какъ LD къ DX, такъ KB къ BX. Положи прямой KB равную BF; то явно, что она упадетъ далѣе точки R (67), и будетъ, какъ LD къ DX, такъ FB къ BX: посему (68) какъ DL къ LX, такъ BF къ FX. Поелику же отношеніе DL къ LX есть данное, равно и RL къ LX: то отношеніе RL къ LD будетъ данное (69). Итакъ,

поелику отношеніе RL къ LX есть сложенное изъ отношенія RL къ LD, и отношенія DL къ LX*; но какъ RL къ LD, *(45), v.
такъ квадратъ изъ DB къ квадрату изъ DX (70), а какъ DL къ LX, такъ BF къ FX: посему отношеніе RL къ LX есть сложенное изъ отношенія квадрата изъ BD къ квадрату изъ DX, и отношенія BF къ FX*. Сдѣлай, какъ RL къ LX, такъ *5, v.
BF къ FH. (71). И поелику отношеніе RL къ LX дано, то и отношеніе FB къ FH дано; но BF дана, ибо она равна радіусу, посему и FH есть данная. Посему такожъ*, отношеніе BF къ FH есть сло- *11, v.
женное изъ отношенія квадрата изъ BD къ квадрату изъ DX, и отношенія BF къ FX. Но отношеніе BF къ FH есть также сложенное изъ отношенія BF къ FX и отношенія FX къ FH*. Отнимъ общее от- *(45), v.
ношеніе BF къ FX: посему въ остальныхъ будетъ, какъ квадратъ изъ BD, то есть данный, къ квадрату изъ DX, такъ XF къ FH, то есть къ данному. Но и FD дана: и потому должно разсѣчь данную прямую DF въ точкѣ X, сдѣлавъ какъ XF къ данной FH, такъ данный квадратъ изъ BD къ квадрату изъ DX. Говоря вообще, сіе можетъ быть рѣшено; но

естьли ввести найденныя условія, то есть, что DB есть двукратная прямой BF и что BF больше FH, то не можетъ быть никакого рѣшенія. Итакъ вопросъ сей долженъ выразиться слѣдующимъ образомъ: По даннымъ двумъ прямымъ DB, BF, изъ коихъ DB двукратная прямой BF, и по данной на BF точкѣ H, разсѣчь прямую DB въ точкѣ X, сдѣлавъ, какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ DX, такъ XF къ FH; что мы на концѣ сего сочиненія рѣшимъ какъ аналитически, такъ и синтетически (72).

Задача сія построится такъ: Пусть данное отношеніе будетъ, прямой Q къ прямой S, большей къ меньшей; и пусть данъ будетъ шаръ; и пусть онъ разсѣчется плоскостію чрезъ центръ, и сѣченіе будетъ кругъ ABCD, коего поперечникъ BD, а центръ K. Положи BF равную KB; и разсѣки BF въ точкѣ H такъ, чтобъ была HF къ HB, какъ Q къ S; и разсѣки еще BD въ точкѣ X такъ, чтобъ было XF къ HF, какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ DX; и чрезъ X проведи плоскость перпендикулярную къ BD. Говорю, что она разсѣ-

четъ шаръ такъ, что большій отрѣзокъ будетъ къ меньшему, какъ Q къ S.

Сдѣлай, какъ KB, BX къ BX, такъ LX къ DX, и какъ KD, DX къ DX, такъ RX къ XB; и протяни AL, LC, AR, RC. Итакъ изъ строенія будетъ, по доказанному аналитически, прямоугольникъ въ RL, LD равенъ квадрату изъ LK, и какъ KL къ LD, такъ BD къ DX: посему и какъ квадратъ изъ KL къ квадрату изъ LD, такъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ DX. И поелику прямоугольникъ въ RL, LD равенъ квадрату изъ LK: то какъ RL къ LD, такъ квадратъ изъ LK къ квадрату изъ LD*; посему и какъ RL къ LD, такъ квад- *сл:2,20,VI.
ратъ изъ BD къ квадрату изъ DX*, то *11,V.
есть такъ XF къ FH. И поелику какъ KB, BX къ BX, такъ LX къ DX, и KB равна BF: то будетъ, какъ FX къ XB, такъ LX къ DX; и обращеніемъ, какъ XF къ FB, такъ XL къ LD*: чего ради и *сл:19,V.
какъ LD къ LX, такъ BF къ FX*. И поелику *сл:4,V.
какъ RL къ LD, такъ XF къ FH; и какъ DL къ LX, такъ BF къ FX: то равномѣстно въ обратной пропорціи, какъ RL къ LX, такъ BF къ FH*; а посему *23,V.
какъ LX къ XR, такъ FH къ HB*. Но какъ *17 и сл:4,V
FH къ HB, такъ Q къ S: чего ради и какъ

11,г. LX къ XR, то есть какъ конусъ ACL къ
14,XII. конусу ARC, то есть какъ шаровый отрѣзокъ ADC къ отрѣзку ABC, такъ Q къ S.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Составить отрѣзокъ шара, подобный данному и равный другому данному.

Пусть будутъ ABC, EFG два данные шаровые отрѣзки; и пусть основаніе отрѣзка ABC будетъ кругъ около поперечника AB, а вершина въ точкѣ C; основаніе же отрѣзка EFG будетъ кругъ около поперечника EF, а вершина въ точкѣ G. Надлежитъ найти отрѣзокъ, равный отрѣзку ABC, а подобный отрѣзку EFG.

Положимъ, что найденъ: и пусть будетъ сей отрѣзокъ HKL, его основаніе кругъ около поперечника HK, а вершина въ точкѣ L; и пусть еще на сихъ шарахъ будутъ круги ANBC, HOKL, EPFG, коихъ поперечники CN, LO, GP перпедикулярны къ основаніямъ отрѣзковъ, а центры ихъ точки Q, R, S. Сдѣлай какъ QN, NT къ NT, такъ XT къ TC; и какъ RO, OU къ OU, такъ UY къ UL; и еще какъ SP, PV къ PV, такъ ZV къ VG; и вообрази конусы, коихъ основанія круги около поперечниковъ AB, HK, EF, а вершины въ

точкахъ X, Y, Z. Итакъ конусъ ABX равенъ шаровому отрѣзку ABC, а конусъ YHK шаровому отрѣзку HKL, а конусъ EZF отрѣзку EGF: по доказанному†. И †3.
поелику шаровый отрѣзокъ ABC равенъ отрѣзку HKL: то и конусъ AXB равенъ конусу YHK. А равныхъ конусовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ*: по- *15, XII.
сему, какъ кругъ около поперечника AB къ кругу около поперечника HK, такъ YU къ XT. Но какъ кругъ къ кругу, такъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ HK: посему какъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ HK, такъ YU къ XT. Поелику же отрѣзокъ EFG подобенъ отрѣзку HKL; то докажется, что и конусъ EFZ подобенъ конусу YHK (73): посему какъ ZV къ EF, такъ YU къ HK*. И какъ отношеніе ZV *опр. 24, XI
къ EF дано (74): посему и отношеніе YU къ HK есть данное. Пусть оно будетъ тоже съ отношеніемъ XT къ D: то, поелику XT дана, и D есть данная; и притомъ будетъ какъ YU къ XT, то есть какъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ HK, такъ HK къ D*. Положи квадра- *16, V.
ту изъ HK равный прямоугольникъ въ AB, W; посему какъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ HK, такъ AB къ W*. *сл. 2: 20, VI

Доказано же, что какъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ HK, такъ HK къ D: посему, и премѣненіемъ, какъ AB къ HK,
11и16,V. такъ W къ D. Но какъ AB къ HK, такъ HK къ W, ибо квадратъ изъ HK равенъ прямоугольнику въ AB, W: чего ради какъ AB къ HK, такъ HK къ W, и такъ W къ D. Итакъ HK, W суть двѣ среднія непрерывно пропорціональныя между AB, D.

Задача сія построится такъ: Пусть будутъ ABC EFG два отрѣзка: ABC тотъ, коему надлежитъ составить равный, а EFG коему подобный; и пусть будутъ шаровъ наибольшіе круги ACBN, GEPF, ихъ поперечники CN, GP, а центры Q, S. Сдѣлай, какъ QN, NT къ NT, такъ XT къ TC, и какъ SP, PV къ PV, такъ ZV къ VG: посему конусъ XAB равенъ шаровому отрѣзку ABC, а конусъ FZE отрѣзку
3. EGF. Сдѣлай еще, какъ ZV къ EF, такъ XT къ D; и между двухъ данныхъ прямыхъ AB, D возьми двѣ среднія непрерывно пропорціональныя HK, W, то есть чтобъ было, какъ AB къ HK, такъ HK къ W, и такъ W къ D; и на HK составь круговый отрѣзокъ HKL подобный отрѣзку
33,III. EFG; и дополни кругъ, и пусть его по-

перечникъ будетъ LO; и вообрази шаръ, коего наибольшій кругъ былъ бы LHOK, а центръ R; и чрезъ HK проведи плоскость перпендикулярную къ LO. Итакъ шаровый отрѣзокъ, что со стороны L, подобенъ шаровому отрѣзку EFG, ибо круговые отрѣзки подобны*. Говорю еще, *оп. 11, III. что онъ равенъ отрѣзку ABC. Ибо сдѣлай, какъ RO, OU къ OU, такъ YU къ UL: посему конусъ YHK равенъ шаровому отрѣзку HKL+. Поелику же конусъ YHK по- +3. добенъ конусу FZE: то какъ ZV къ EF, то есть какъ XT къ D*, такъ YU къ HK; *11, V. посему, премѣненіемъ и преложеніемъ, какъ YU къ XT, такъ HK къ D. И поелику прямыя AB, KH, W, D суть взаимно пропорціональныя; то какъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ HK, такъ HK къ D*. Но *сл. 2: 20, VI и 16, V. какъ HK къ D, такъ YU къ XT: посему какъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ KH, то есть какъ кругъ около поперечника AB къ кругу около поперечника HK*, такъ YU къ XT*. Чего ради конусъ *2, XII. XAB равенъ конусу YHK*: слѣдовательно *15, XII. и шаровый отрѣзокъ ABC равенъ отрѣзку HKL. Итакъ составленъ отрѣзокъ HKL, равный отрѣзку данному ABC и подобный другому данному EFG.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

По даннымъ двумъ отрѣзкамъ тогоже или различныхъ шаровъ, найти шаровый отрѣзокъ, подобный одному изъ данныхъ, а поверхность имѣющій равную поверхности другаго.

Пусть будутъ данные шаровые отрѣзки по дугамъ ABC, DEF; и пусть, который по дугѣ ABC, будетъ тотъ, коему искомый долженъ быть подобенъ, а по дугѣ DEF тотъ, коего поверхности искомый долженъ быть равенъ. Положимъ, что сіе сдѣлано: и пусть будетъ шаровый отрѣзокъ KLM подобенъ отрѣзку ABC, а поверхностію равенъ поверхности отрѣзка DEF. Вообрази центры шаровъ, и чрезъ центры проведи плоскости перпендикулярныя къ основаніямъ отрѣзковъ; и пусть будутъ сѣченія шаровъ, наибольшіе круги KLMN, BAHC, EFGD, а основанія отрѣзковъ, прямыя KM, AC, DF; и пусть поперечники шаровъ, перпендикулярные къ KM, AC, DF, будутъ LN, BH, EG; и протяни LM, BC, EF.

Поелику поверхность шароваго отрѣзка KLM равна поверхности отрѣзка DEF; то и кругъ, имѣющій радіусъ

равный ML, равенъ кругу, имѣющему радіусъ равный EF, ибо поверхность каждаго изъ помянутыхъ отрѣзковъ равна, по доказанному, кругу, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности его основанія+: +48 и 49, I.
слѣдственно и ML равна EF. Поелику же отрѣзокъ KLM подобенъ отрѣзку ABC; то какъ RL къ RN, такъ BQ къ QH (75); и, преложеніемъ и совокупленіемъ, какъ NL къ LR, такъ HB къ BQ*. Но какъ RL *сл: 4, и 18, V.
къ LM, такъ BQ къ CB, по подобію треугольниковъ LMR, BCQ*: посему какъ NL *4, VI.
къ LM, то есть къ EF, такъ HB къ BC*; и *22, V.
премѣненіемъ. И поелику отношеніе EF къ BC есть данное, ибо каждая изъ сихъ прямыхъ дана; то и отношеніе LN къ BH будетъ данное; но прямая BH данная, посему и LN данная, слѣдовательно и шаръ есть данный.

Задача сія построится такъ: Пусть будутъ ABC, DEF данные два шаровые отрѣзка: ABC тотъ, коему искомый долженъ быть подобенъ, а DEF тотъ, коего поверхности онъ долженъ имѣть равную поверхность. Учини то же строеніе, что и въ аналитическомъ рѣшеніи;

и сдѣлай какъ BC къ EF, такъ BH къ NL; и около поперечника NL напиши кругъ; и вообрази шаръ, коего наибольшій кругъ былъ бы LKNM; и разсѣки NL въ R, чтобъ было, какъ HQ къ QB, такъ NR къ RL; и чрезъ R разсѣки поверхность шара плоскостію перпендикулярною къ LN; и протяни LM. Итакъ круговые отрѣзки что на KM, AC суть подобные (76); посему и шаровые отрѣзки подобны. И поелику, въ слѣдствіе разсѣченія, какъ
18, V. HB къ BQ, такъ NL къ LR; а какъ QB
4, VI. къ BC, такъ RL къ LM: посему какъ HB
22, и 16, V. къ NL, такъ BC къ LM. Но и какъ HB къ NL, такъ BC къ EF: чего ради EF
11 и 9, V. равна LM; посему и кругъ, коего радіусъ EF, равенъ кругу, коего радіусъ LM. Но кругъ, коего радіусъ EF, равенъ отрѣзку DEF, и кругъ, коего радіусъ LM равенъ отрѣзку KLM, какъ доказано въ первой
+48 и 49, I. книгѣ+: посему поверхность шароваго отрѣзка KLM равна поверхности отрѣзка DEF. Притомъ отрѣзокъ KLM подобенъ отрѣзку ABC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Отъ даннаго шара отсѣчь плоскостію отрѣзокъ, такъ чтобы сей отрѣзокъ къ

конусу, имѣющему съ нимъ тоже основаніе и туже высоту, имѣлъ данное отношеніе.

Пусть будетъ данъ шаръ, коего наибольшій кругъ ABCD, и поперечникъ BD. Надлежитъ разсѣчь шаръ плоскостію чрезъ AC такъ, чтобы шаровый отрѣзокъ ABC къ конусу ABC имѣлъ отношеніе данное.

Положимъ, что сіе сдѣлано: и пусть будетъ E центръ шара; и какъ ED, DF къ DF, такъ GF къ FB. Итакъ конусъ ACG равенъ отрѣзку ABC†. Притомъ отношеніе конуса AGC къ конусу ABC будетъ данное; а посему и отношеніе GF къ FB есть данное. Но какъ GF къ FB, такъ ED, DF къ DF: посему данное будетъ отношеніе ED, DF къ DF, слѣдственно и отношеніе ED къ DF: а посему DF есть данная, слѣдовательно также и AC (77). И поелику ED, DF къ DF имѣетъ большее отношеніе, нежели ED, DB къ DB (78); но ED, DB равны тремъ ED, а DB равна двумъ ED: посему ED, DF къ DF имѣетъ большее отношеніе, нежели три къ двумъ. Но отношеніе ED, DF къ DF есть тоже съ отношеніемъ даннымъ: а посему, дабы строеніе было

возможно, надлежитъ данному отношенію быть больше отношенія трехъ къ двумъ.

Задача сія построится такъ: Пусть будетъ данъ шаръ, коего наибольшій кругъ ABCD, поперечникъ BD, а центръ E; и пусть данное отношеніе будетъ KH къ KL, большее отношенія трехъ къ двумъ. Поелику же какъ три къ двумъ, такъ ED, DB къ DB; то HK къ KL имѣетъ большее отношеніе, нежели ED,
13, V. DB къ DB: посему, отдѣленіемъ, HL къ LK имѣетъ большее отношеніе, нежели
k, V. ED къ DB. Сдѣлай, какъ HL къ LK, такъ ED къ DF; и отъ F проведи, подъ прямыми углами къ BD, прямую AFC; и чрезъ AC проведи плоскость перпендикулярную къ BD. Говорю, что шаровый отрѣзокъ ABC къ конусу ABC имѣетъ тоже отношеніе, что HK къ KL. Ибо сдѣлай, какъ ED, DF къ DF, такъ GF къ FB: посему конусъ CAG
+3. равенъ шаровому отрѣзку ABC+. И поелику (79) какъ HK къ KL, такъ ED, DF
11. V. къ DF, то есть такъ GF къ FB, то есть такъ конусъ AGC къ конусу ABC; и конусъ AGC равенъ шаровому отрѣзку ABC: посему какъ отрѣзокъ ABC къ конусу ABC, такъ HK къ KL.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели шаръ разсѣчется плоскостію не чрезъ центръ; то большій отрѣзокъ къ меньшему будетъ имѣть отношеніе меньшее, нежели удвоенное поверхности отрѣзка большаго къ поверхности меньшаго, а большее нежели полуторное (80).

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ ABCD, и поперечникъ BD; и пусть разсѣченъ будетъ чрезъ AC плоскостію перпендикулярною къ кругу ABCD; и шара большій отрѣзокъ пусть будетъ ABC. Говорю, что отрѣзокъ ABC къ отрѣзку ADC имѣетъ отношеніе меньшее, нежели удвоенное поверхности большаго отрѣзка къ поверхности меньшаго, а большее нежели полуторное.

Протяни BA, AD; и пусть будетъ E центръ; и сдѣлай, какъ ED, DF къ DF, такъ HF къ FB, и какъ EB, BF къ BF, такъ GF къ FD; и вообрази конусы, имѣющіе основаніе кругъ около поперечника AC, а вершины въ точкахъ H, G. Итакъ, по вышеписанному будетъ, конусъ AHC равенъ отрѣзку ABC, а конусъ ACG отрѣзку ADC†, и какъ квадратъ изъ BA †3. къ квадрату изъ AD, такъ поверхность

**

отрѣзка ABC къ поверхности отрѣзка
(53), г. ADC. Надлежитъ же доказать, что большій отрѣзокъ шара къ меньшему имѣетъ меньшее отношеніе, нежели удвоенное поверхности отрѣзка большаго къ поверхности меньшаго. Говорю также, что конусъ AHC къ конусу AGC, то есть FH къ FG, имѣетъ меньшее отношеніе, нежели удвоенное квадрата изъ BA къ квадрату изъ AD, то есть прямыя BF къ FD.

Поелику какъ ED, DF къ DF, такъ HF къ FB, а какъ EB, BF къ BF, такъ FG къ FD: то, по причинѣ что BE равна ED, будетъ какъ BF къ FD, такъ HB къ
+въ 3 и 5. BE, какъ прежде доказывано было+. Еще же, поелику какъ EB, BF къ BF, такъ FG къ FD; то, положивъ BK равную BE,
ь, г. и замѣтивъ, что HB больше BE, ибо BF больше FD, будетъ: какъ KF къ FB, такъ GF къ FD; « и премѣненіемъ. » Но какъ FB къ FD, такъ, по доказанному, HB къ BE, и BE равна KB: посему какъ HB къ
11, г. BK, такъ KF къ GF. И поелику HF къ FK имѣетъ меньшее отношеніе, нежели HB къ BK (81); а какъ HB къ BK, такъ, по доказанному, KF къ FG: посему HF къ FK имѣетъ меньшее отношеніе, не-

жели и FK къ FG: чего ради прямоугольникъ въ HF, FG меньше квадрата изъ FK (82). Посему прямоугольникъ въ HF, FG къ квадрату изъ FG, то есть FH къ FG*, имѣетъ меньшее отношеніе, не- *1, VI.
жели квадратъ изъ KF къ квадрату изъ FG*. Квадратъ же изъ KF къ квадрату *8, V.
изъ FG имѣетъ удвоенное отношеніе KF къ FG: посему HF къ FG имѣетъ отношеніе меньшее, нежели удвоенное KF къ FG. А какъ KF къ FG, такъ BF къ FD: посему HF къ FG имѣетъ отношеніе меньшее, нежели удвоенное BF къ FD. Чего мы и искали.

И поелику BE равна ED, то прямоугольникъ въ BF, FD меньше прямоугольника въ BE, ED*: посему BF къ BE имѣетъ *5, II.
меньшее отношеніе, нежели ED къ DF (83), то есть, нежели HB къ BF; а посему квадратъ изъ FB меньше прямоугольника въ HB, BE (82), то есть въ HB, BK. Пусть будетъ квадратъ изъ BN равный прямоугольнику въ HB, BK (84); посему какъ HB къ BK, такъ квадратъ изъ HN къ квадрату изъ NK. Но квадратъ изъ HF къ квадрату изъ FK имѣетъ большее отношеніе, нежели квадратъ изъ HN къ квадрату изъ NK (85): посему квадратъ

изъ HF къ квадрату изъ FK имѣетъ большее отношенie, нежели HB къ BK, то есть HB къ BE, то есть KF къ FG*.
* 11, г. Чего ради HF къ FG имѣетъ отношенie большее, нежели полуторное KF къ FG, какъ то на концѣ доказано будетъ (86). Но какъ HF къ FG, такъ конусъ AHC къ конусу AGC, то есть отрѣзокъ ABC къ отрѣзку ADC; а какъ KF къ FG, такъ BF къ FD, то есть квадратъ изъ BA къ квадрату изъ AD, то есть поверхность отрѣзка ABC къ поверхности от-
+ 48 и 49 1. рѣзка ADC+. Итакъ большiй отрѣзокъ къ меньшему имѣетъ отношенie меньшее, нежели удвоенное поверхности большаго отрѣзка къ поверхности меньшаго, а большее нежели полуторное.

Иначе. Пусть будетъ шаръ, коего наибольшiй кругъ ABCD, поперечникъ AC и центръ E; и пусть оный будетъ разсѣченъ чрезъ BD плоскостiю перпендикулярною къ AC. Говорю, что большiй отрѣзокъ DAB къ меньшему BCD имѣетъ отношенie меньшее, нежели удвоенное поверхности отрѣзка ABD къ поверхности отрѣзка BCD, а большее нежели полуторное. Протяни AB, BC. Итакъ

отношеніе поверхности къ поверхности есть тоже, что отношеніе круга, коего радіусъ AB, къ кругу, коего радіусъ BC, то есть тоже, что прямыя AH къ прямой HC. Положи каждую изъ прямыхъ AF, CG равную радіусу круга. Итакъ отношеніе отрѣзка BAD къ отрѣзку BCD сложенно, изъ отношенія отрѣзка BAD къ конусу, коего основаніе кругъ около поперечника BD а вершина точка A, изъ отношенія сего конуса къ конусу, коего основаніе тоже а вершина точка C, и изъ отношенія сказаннаго теперь конуса къ отрѣзку BCD*. Но отношеніе отрѣзка BAD къ конусу BAD есть тоже что GH къ HC†; отношеніе же конуса BAD къ конусу BCD есть тоже что и AH къ HC+; и отношеніе конуса BCD къ отрѣзку BCD есть тоже, что и AH къ HF+* (87): а отношеніе сложенное изъ отношеній, GH къ HC, и AH къ HC есть тоже, что отношеніе прямоугольника въ AH, HG къ квадрату изъ HC; (88) отношеніе же сложенное изъ отношенія прямоугольника въ GH, HA къ квадрату изъ CH, и изъ отношенія AH къ HF, есть тоже, что отношеніе прямоугольника въ GH, HA на HA (89) къ квадрату изъ HC на HF;

* (45).
† 3
+ 3; и * сл: 4, г.

а отношеніе прямоугольника въ GH, HA на HA къ квадрату изъ HC на HF есть тоже, что и квадрата изъ AH на HG къ квадрату изъ HC на HF (90); и притомъ отношеніе прямоугольника въ GH, HA на HA къ квадрату изъ HC на HG есть тоже, что и отношеніе квадрата изъ HA къ квадрату изъ HC. Итакъ, что квадратъ изъ HA на HG къ квадрату изъ CH на FH имѣетъ меньшее отношеніе, нежели удвоенное прямыя AH къ HC, которое есть тоже, что и отношеніе
20, IV. квадрата изъ AH къ квадрату изъ HC: сіе потому, что квадратъ изъ AH на GH къ квадрату изъ HC на HF имѣетъ меньшее отношеніе, нежели тотъ же квадратъ изъ AH на GH къ квадрату изъ
8, V. CH на HG, потому что квадратъ изъ HC на HF больше квадрата изъ CH на HG, потому что HF больше HG.

Утверждаю такожъ, что большій отрѣзокъ къ меньшему имѣетъ отношеніе большее, нежели полуторное поверхности къ поверхности. Поелику же доказано, что отношеніе отрѣзковъ есть тоже, что отношеніе квадрата изъ AH на HG къ квадрату изъ HC на HF; а отношеніе поверхности къ поверхности есть

полуторное отношенія куба изъ AB къ кубу изъ BC (91): то утверждаю, что квадратъ изъ AH на HG къ квадрату изъ CH на HF имѣетъ большее отношеніе, нежели кубъ изъ AB къ кубу изъ BC, то есть кубъ изъ AH къ кубу изъ HB*, *37, XII и 8, VI. то есть квадратъ изъ AH къ квадрату изъ HB, и AH къ HB* (92). Но отноше- *c, XII. ніе квадрата изъ AH къ квадрату изъ HB совокупленное съ отношеніемъ AH къ HB, есть тоже, что отношеніе квадрата изъ AH къ прямоугольнику въ CH, HB (93); отношеніе же квадрата изъ AH къ прямоугольнику въ CH, HB есть тоже, что отношеніе квадрата изъ AH на HG къ прямоугольнику въ CH, HB на HG: посему утверждаю, что квадратъ изъ AH на HG къ квадрату изъ CH на HF имѣетъ большее отношеніе, нежели квадратъ изъ AH къ прямоугольнику въ BH, HC, то есть квадратъ изъ AH на HG къ прямоугольнику въ BH, HC на HG. Посему надлежитъ доказать, что квадратъ изъ CH на HF есть меньше прямоугольника въ BH, HC на HG*; а сіе *10, V. значитъ доказать, что квадратъ изъ CH къ прямоугольнику въ BH, HC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели GH къ HF (94):

посему надлежитъ доказать, что GH къ HF имѣетъ большее отношеніе, нежели
f, V и I, VI. CH къ HB. Проведи отъ точки E подъ прямыми углами къ EC прямую EK, и отъ B перпендикулярную къ ней прямую BL. Поелику же оставалось доказать, что GH къ HF имѣетъ большее отношеніе, нежели CH къ HB; а HF равна AH, KE: посему надлежитъ доказать, что GH къ HA, KE имѣетъ большее отношеніе, нежели CH къ HB. Слѣдовательно, отнявъ отъ GH прямую CH, а отъ KE прямую EL равную BH, должно будетъ доказать, что остальная CG къ остальной AH, KL имѣетъ большее отношеніе (95), нежели
сл: 8. V. CH къ HB, то есть HB къ HA, то есть LE къ HA; и премѣненіемъ, что « CG, то есть » KE къ LE имѣетъ большее
g, V. отношеніе, нежели KL, HA къ HA; и отдѣленіемъ, что KL къ LE имѣетъ
k, V. большее отношеніе, нежели KL къ HA; и наконецъ, что LE больше HA.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Изъ шаровыхъ отрѣзковъ, содержимыхъ въ равной поверхности, наибольшій есть полушаріе.

Пусть будетъ шаръ, коего наибольшій

кругъ ABCD, и поперечникъ AC, и другой шаръ, коего наибольшій кругъ EFGH, и поперечникъ EG; и пусть разсѣчены будутъ плоскостію, одинъ проходящею а другой не проходящею чрезъ центръ; и пусть сѣкущія плоскости будутъ перпендикулярны къ поперечникамъ AC, EG, и дѣлаютъ сѣченія по линіямъ DB, FH. Здѣсь отрѣзокъ шара что по дугѣ FEH, есть полушаріе; изъ отрѣзковъ же что по дугѣ BAD, одинъ, въ фигурѣ на коей точка S, большій полушарія, а другой, въ другой фигурѣ, меньшій полушарія. И пусть всѣхъ сказанныхъ отрѣзковъ будутъ поверхности равныя. Говорю, что полушаріе, которое по дугѣ FEH, больше отрѣзка что по дугѣ BAD.

Поелику сказанныхъ отрѣзковъ поверхности суть равныя, то явно что и BA равна прямой EF: ибо доказано, что поверхность всякаго отрѣзка равна кругу, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности его основанія[+]. И поелику дуга BAD, въ фигурѣ на коей точка S, больше половины круга; то явно, что квадратъ изъ BA есть меньше двукратнаго изъ AK (96), а больше двукратнаго изъ радіуса (97).

[+] 48 и 49, I.

Пусть будетъ радіусу круга ABD равна прямая CO, « ~~а радіусу круга EFH прямая AR~~; » и какое отношеніе имѣетъ CO къ CK, пусть тоже имѣетъ MA къ AK; и на кругѣ что около поперечника BD, пусть будетъ конусъ, имѣющій вершину въ точкѣ M: посему онъ равенъ шаро-
†3. вому отрѣзку что по дугѣ BAD†. И пусть еще прямой EL будетъ равна EN; и на кругѣ что около поперечника HF, пусть будетъ конусъ, имѣющій вершину въ точкѣ N: посему онъ равенъ полушарію,
†36, 1. что по дугѣ HEF†. И поелику прямоугольникъ содержимый въ AR, RC больше прямоугольника содержимаго въ AK, KC, ибо перваго меньшая сторона есть больше меньшой стороны другаго (98); а квадратъ изъ AR равенъ прямоугольнику содержимому въ AK, CO, ибо онъ есть половина квадрата изъ AB (99): посему и оба первые обоихъ послѣднихъ больше (100); а посему прямоугольникъ содержимый въ CA, AR больше прямоугольника въ OK, KA. Прямоугольнику же въ OK, KA равенъ прямоугольникъ въ MK, KC (101): слѣдственно прямоугольникъ въ CA, AR больше и прямоугольника въ MK, KC; а посему CA къ CK имѣетъ большее от-

ношеніе, нежели МК къ AR. Но какое отношеніе имѣетъ АС къ СК, тоже имѣетъ и квадратъ изъ AB къ квадрату изъ BK (102): изъ сего слѣдуетъ (103), что половина квадрата изъ AB, которая равна квадрату изъ AR, имѣетъ къ квадрату изъ BK большее отношеніе, нежели (104) MK къ двукратной AR, которая равна LN. Посему и кругъ что около поперечника FH, къ кругу что около поперечника BD, имѣетъ большее отношеніе, нежели MK къ NL: слѣдовательно конусъ, имѣющій основаніе кругъ, что около поперечника FH, а вершину въ точкѣ N, больше конуса, имѣющаго основаніе кругъ что около поперечника BD, а вершину въ точкѣ M (105). А потому и полушаріе что по дугѣ FEH, есть больше отрѣзка что по дугѣ BAD.

АРХИМЕДА ИЗМѢРЕНІЕ КРУГА.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Всякій кругъ равенъ прямоугольному треугольнику, коего одна изъ сторонъ что около прямаго угла, равна радіусу круга, а другая его окружности.

Пусть будетъ кругъ ABCD, такой въ сравненіи съ треугольникомъ E, каковымъ предполагается. Говорю, что онъ равенъ треугольнику E.

Ибо пусть, естьли возможно, кругъ будетъ больше. Впиши въ немъ квадратъ AC; и раздѣляй дуги по поламъ; и пусть оставшіеся наконецъ отрѣзки будутъ меньше избытка круга предъ треугольникомъ*: то полученная прямолинейная фигура будетъ также больше треугольника. Возьми центръ N, и проведи перпендикуляръ NO. Итакъ NO меньше одной изъ сторонъ треугольника E. A и

*въ 2, XII.

очертаніе прямолинейной фигуры меньше другой стороны, ибо оно меньше окружности круга⁺; посему прямолинейная фи- ⁺1, I.
гура есть меньше треугольника, что нелѣпо.

Но пусть будетъ кругъ, естьли возможно, меньше треугольника E. Опиши квадратъ, и раздѣли дуги по поламъ, и чрезъ точки сѣченія проведи касательныя. Итакъ уголъ PAR есть прямый: посему PR больше MR*, ибо MR рав- *19, I.
на RA: и потому треугольникъ RPQ больше половины фигуры PFAM*. Пусть *1, VI.
останутся отрѣзки, какъ QFA, такіе, кои меньше избытка треугольника E предъ кругомъ ABCD*. Посему описанная *1, X.
прямолинейная фигура будетъ также меньше треугольника E; что нелѣпо: ибо она больше, потому что NA равна высотѣ треугольника, а очертаніе фигуры больше его основанія⁺. ⁺2, I.

Итакъ кругъ равенъ треугольнику E.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Кругъ къ квадрату изъ его поперечника имѣетъ отношеніе, почти какъ 11 къ 14.

Пусть будетъ кругъ, коего попереч-

никъ AB, и описанный квадратъ CGD; и пусть будетъ прямой линіи CD двукратная DE и седьмая часть EF.

Поелику треугольникъ ACE къ треугольнику ACD имѣетъ отношеніе, какъ
1, VI. 21 къ 7; а треугольникъ ACD къ треугольнику AEF имѣетъ отношеніе, какъ 7 къ 1 (106): посему какъ треугольникъ ACF къ треугольнику ACD, такъ 22 къ 7 (107). Но треугольника ACD есть четырекратный квадратъ CG (108): посему какъ треугольникъ ACF къ квадрату CG, такъ 22 къ 28, или такъ 11 къ 14. А треугольникъ ACF равенъ почти кругу AB: ибо высота AC равна радіусу круга, а основаніе равно почти окружности, которая, какъ доказано будетъ, равна трикратному поперечнику и еще седмой почти его части. Итакъ кругъ къ квадрату CG имѣетъ отношеніе, почти какъ 11 къ 14.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Окружность всякаго круга равна трикратному поперечнику, съ избыткомъ, который меньше седмой части поперечника, а больше десяти семдесятъ первыхъ.

Пусть будетъ кругъ, коего поперечникъ AC, центръ E, и касательная CLF; и пусть будетъ уголъ FEC треть прямаго. Итакъ EF къ FC имѣетъ отношеніе, какъ 306 къ 153 (109); а посему EC къ CF будетъ имѣть большее отношеніе, нежели 265 къ 153.

Раздѣли уголъ FEC по поламъ прямою EG: посему будетъ какъ FE къ EC, такъ FG къ GC; и совокупленіемъ и премѣненіемъ, какъ FE, EC къ FC, такъ EC къ CG* (110). Слѣдственно CE къ CG имѣетъ большее отношеніе, нежели 571 къ 153 (111). Посему въ степеняхъ EG къ GC имѣетъ большее отношеніе, нежели 349450 къ 23409; (112) а посему EG къ GC имѣетъ большее отношеніе, нежели $591\frac{1}{8}$ къ 153. * 18 и 16, г.

Раздѣли еще уголъ GEC по поламъ прямою EH: то (113) потому же EC къ CH будетъ имѣть большее отношеніе, нежели $1162\frac{1}{8}$ къ 153 (114). А посему HE къ HC будетъ имѣть большее отношеніе, нежели $1172\frac{1}{8}$ къ 153.

Раздѣли также уголъ HEC по поламъ прямою EK: то EC къ CK будетъ имѣть большее отношеніе (115), нежели $2334\frac{1}{4}$ къ 153 (116). Посему EK къ CK будетъ

имѣть большее отношеніе, нежели $2339\frac{1}{4}$ къ 153.

Раздѣли напослѣдокъ уголъ KEC по поламъ прямою LE: то EC къ LC будетъ имѣть большее отношеніе, нежели $4673\frac{1}{2}$ къ 153.

Итакъ, поелику уголъ FEC, который есть треть прямаго, раздѣленъ четыре раза по поламъ, то уголъ LEC есть $\frac{1}{48}$ прямаго: и потому составь при точкѣ E уголъ CEM равный углу LEC, то уголъ LEM будетъ $\frac{1}{24}$ прямаго. Слѣдственно прямая LM есть сторона многоугольника описаннаго, имѣющаго 96 сторонъ.

И поелику EC къ CL имѣетъ, по доказанному, большее отношеніе, нежели $4673\frac{1}{2}$ къ 153; и прямой EC есть двукратная AC, а прямой CL двукратная LM: посему и AC къ LM имѣетъ большее от-
15 и 13, V. ношеніе, нежели $4673\frac{1}{2}$ къ 153; чего ради AC къ очертанію 96 угольника имѣетъ большее отношеніе, нежели $4673\frac{1}{2}$ къ 14688; слѣдственно, преложеніемъ, очертаніе многоугольника къ поперечнику имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 14688
f, V. къ $4673\frac{1}{2}$. Но изъ сихъ чиселъ первое другаго есть трикратное съ избыткомъ $667\frac{1}{2}$, который меньше нежели седмая

часть числа $4673\frac{1}{2}$: посему очертаніе многоугольника около круга описаннаго есть трикратное поперечника, съ избыткомъ, который меньше седмой его части: а слѣдовательно окружность круга тѣмъ паче меньше нежели трикратный поперечникъ, съ седмою его частію*. *сл: 2, (55).

Пусть будетъ кругъ, и поперечникъ AC, и уголъ BAC треть прямаго. Итакъ AB къ BC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 1351 къ 780; а AC къ CB тоже, что 1560 къ 780 (117).

Раздѣли уголъ BAC по поламъ прямою AG. И поелику уголъ BAG равенъ какъ углу GCB*, такъ и углу GAC, то уголъ GCB равенъ углу GAC; уголъ же AGC есть общій: посему и третій уголъ GFC будетъ равенъ третьему ACG. Чего ради треугольникъ AGC есть равноугольный треугольнику CGF; и потому какъ AG къ GC, такъ CG къ GF, и такъ AC къ CF. Но какъ AC къ CF, такъ CA, AB къ BC: посему какъ BA, AC къ BC, такъ AG къ GC* (118): чего ради AG къ GC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 2911 къ 780 (119); и AC къ EG имѣетъ меньшее отношеніе, нежели $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ къ 780. *21, III *11, V.

* *

Раздѣли уголъ CAG по поламъ прямою AH; то потому же AH къ HC будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели $5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ къ 780, или нежели 1823 къ 240, ибо каждое каждаго есть $\frac{4}{13}$ (120). Слѣдственно AC къ CH имѣетъ меньшее отношеніе, нежели $1838\frac{9}{11}$ къ 240 (121).

Раздѣли еще уголъ HAC по поламъ прямою KA. Посему KA къ KC имѣетъ меньшее
15 и 13, V. отношеніе, нежели $3661\frac{9}{11}$ къ 240, или нежели 1007 къ 66, ибо каждое каждаго есть $\frac{11}{40}$. Посему AC къ CK имѣетъ меньшее отношеніе, нежели $1009\frac{1}{6}$ къ 66 (122).

Раздѣли наконецъ уголъ KAC по поламъ прямою LA. Посему AL къ LC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели $2016\frac{1}{6}$ къ 66, а AC къ CL меньшее, нежели $2017\frac{1}{4}$ къ 66 (123).

Итакъ, преложеніемъ, LC къ CA имѣетъ
f, V. большее отношеніе, нежели 66 къ $2017\frac{1}{4}$, а очертаніе многоугольника къ поперечнику имѣетъ большее отношеніе, нежели 6336 къ $2017\frac{1}{4}$. Но въ нихъ первое есть трикратное числа $2017\frac{1}{4}$, съ избыткомъ, которой больше нежели $\frac{10}{71}$ (124): посему очертаніе 96тиугольника вписаннаго въ кругѣ есть трикратное поперечника, съ избыткомъ, который больше

нежели $\frac{10}{71}$. Слѣдственно окружность круга тѣмъ паче будетъ трикратная поперечника, съ избыткомъ, который больше нежели $\frac{10}{71}$.

Итакъ окружность круга есть поперечника трикратная, съ избыткомъ, который меньше нежели седьмая часть, но больше нежели десять семдесятъ первыхъ поперечника.

АРХИМЕДА

ЛЕММЫ

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели два круга касаются взаимно, какъ круги AEB, CED въ E; и поперечники ихъ будутъ параллельны, каковы поперечники AB, CD; и между точекъ B, D и прикосновеніемъ E протянутся DE, BD: то линія BE будетъ прямая.

Пусть будутъ G, F центры круговъ.
пр. 1. Протяни GF, и продолжи оную до E; и
31, 1. проведи DH параллельную къ GF. Поелику HF равна GD, и GD, EG суть равныя же: посему и отъ равныхъ FB, FE будутъ остальныя GF то есть DH, и HB вза-
акс. 3. имно равныя; а посему и углы HDB, HBD
5, 1. будутъ взаимно равные. Но и углы EGD, EFB также и углы EGD, DHB суть рав-
29, 1. ные: посему и остальные GED, GDE равные взаимно, равны угламъ HDB, HBD; а посему уголъ EDG равенъ углу DBF. При-

томъ уголъ GDB есть общій: чего ради два угла GDB, FBD (кои равны двумъ прямымъ*) равны двумъ угламъ GDB, GDE; *29, I.
а потому и сіи углы равны двумъ прямымъ. Итакъ линія EDB есть прямая* (125). *14, I.
Что и доказать надлежало.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Пусть будетъ полукружіе CBA, къ коему касаются прямыя DC, DB; и BE перпендикулярная къ AC; и пусть протянута будетъ AD, пресѣкающая прямую BE въ F. Говорю, что BF равна FE.

Протяни AB; и продолжи оную также и CD, и пусть онѣ встрѣтятся въ G; и протяни CB. Итакъ уголъ CBA, будучи въ полукружіи, есть прямый*; а посему *31, III.
и уголъ CBG прямый. И поелику DBEC есть прямоугольникъ; то въ прямоугольномъ треугольникѣ GBC, проведенная отъ B прямая BD перпендикулярна къ основанію. Но BD, DC взаимно равны*, *a, III.
ибо онѣ суть двѣ касательныя къ кругу; посему и CD равна DG (126): какъ доказано нами въ сочиненіи о прямоугольныхъ треугольникахъ (127). И поелику въ прямоугольномъ треугольникѣ GAC, прямая BE параллельна къ основанію, и

отъ средины основанія проведена DA, пресѣкающая ту параллельную въ F: посему и BF будетъ равна FE (128). Ч. И Д. Н. (129).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Пусть будетъ круга отрѣзокъ CA, и гдѣ нибудь на немъ точка B, и BD перпендикулярная къ AC, а отрѣзокъ DE равный DA, и дуга BF равная дугѣ BA. Говорю, что протянутая прямая CF равна CE.

Протяни AB, BF, FE, EB. Поелику дуга BA равна дугѣ BF, то и прямая AB
29, III. равна прямой BF. Еще же, поелику AD равна ED, и два угла при D прямые,
4, I. а DB общая; посему AB равна BE. Чего ради BF, BE суть равныя: и потому два угла BFE; BEF взаимно равны. И поелику четыреугольникъ CFBA въ кругѣ; то уголъ CFB съ угломъ CAB, ему противулежащимъ, слѣдственно и съ угломъ
22, III. BEA, равенъ двумъ прямымъ. Но и уголъ CEB съ угломъ BEA равенъ двумъ же пря-
13, I. мымъ: посему углы CFB, CEB взаимно
акс. 10, равны; а посему и остальные CFE, CEF
1 и 3. взаимно равны. Чего ради CE равна CF*.
*6, I. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Пусть будетъ полукружіе ABC, и надъ его поперечникомъ AC пусть будутъ два полукружія, одно AD а другое DC, и прямая DB перпендикулярная. Говорю, что произшедшая фигура, называемая Арбелонъ, то есть поверхность, содержимая дугою полукружія большаго и двумя дугами полукружій меньшихъ, равна кругу, коего поперечникъ перпендикуляръ DB.

Поелику прямая DB есть средняя пропорціональная между двумя прямыми DA, DC*; то прямоугольникъ въ AD, DC ра- *сл: 8, VI.
венъ квадрату изъ DB*. Придай обще *17, VI.
прямоугольникъ въ AD, DC съ квадратами изъ AD, DC: посему двукратный прямоугольникъ въ AD, DC, съ двумя квадратами изъ AD, DC, то есть квадратъ изъ AC*, равенъ (130) двукратному квад- *4, II.
рату изъ DB, съ двумя квадратами изъ AD, DC. Но круги пропорціональны квадратамъ: посему и кругъ, коего поперечникъ AC, равенъ двукратному кругу, коего поперечникъ DB, съ двумя кругами, коихъ поперечники AD, DC: а посему полукружіе AC равно кругу, коего поперечникъ DB, съ двумя полукружія-

акс. 7. ми AD, DC. Отними обще два полукружія AD, DC: посему остальная фигура, содержимая полукружіями AC, AD, DC, именуемая Арбелонъ, равна кругу, коего поперечникъ DB. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Пусть будетъ полукружіе AB, и на поперечникѣ его какая ниесть точка C, и два полукружія AC, CB; и пусть будетъ отъ C поставлена перпендикулярная къ AB прямая CD; и по обѣимъ ея сторонамъ пусть будутъ написаны два круга, касательные къ ней и къ полукружіямъ. Говорю, что сіи круги взаимно равны.

Пусть одинъ изъ нихъ касается къ прямой DC въ E, къ полукружію AB въ F, а къ полукружію AC въ G. Проведи поперечникъ HE, то онъ будетъ параллельный къ поперечнику AB: ибо два угла
†1. HEC, ACE суть прямые†; и протяни FH, HA, то AF будетъ прямая, по доказанному въ первомъ предложеніи. И пусть
акс. 11. AF, CE встрѣтятся въ D: сіе же будетъ потому, что углы, ими составляемые при A, C, суть меньше двухъ прямыхъ; и протяни FE, EB: то EFB, сходно съ

предыдущимъ, будетъ прямая, и притомъ перпендикулярна къ AD, ибо уголъ AFB прямый, поелику онъ въ полукружіи AB. Протяни еще HG, GC, то и HC будетъ прямая; и протяни EG, GA, то и EA будетъ прямая; продолжи оную до I, и протяни BI, то и сія будетъ перпендикулярна къ AI; и наконецъ, протяни DI. Итакъ, поелику AD, AB суть двѣ прямыя; и проведены, отъ D перпендикулярная къ AB прямая DC, и отъ B перпендикулярная къ DA прямая BF, которыя взаимно пресѣкаются въ E; и AE, продолженная до I, перпендикулярна къ BI: то линія BID будетъ прямая (131), какъ доказано нами въ предложеніяхъ, находящихся въ сочиненіи о прямоугольныхъ треугольникахъ. И поелику углы AGC, AIB прямые, то BD, CG параллельны*; *28, I.
посему какъ AD къ DH, то есть какъ AC къ HE (132), такъ AB къ BC*: чего *4, VI.
ради прямоугольникъ въ AC, CB равенъ прямоугольнику въ AB, HE*. Подобно и *16, VI.
о кругѣ LMN докажется, что прямоугольникъ въ AC, CB равенъ прямоугольнику содержимому въ AB и въ его поперечникѣ. А отсюда докажется, что круговъ EFG, LMN поперечники равны: а

опр. 3, III. потому и самые круги взаимно равны. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Пусть будетъ полукружіе ABC, и на поперечникѣ его точка D, взятая такъ, чтобъ AD была полуторная прямой DC; и пусть на AD, DC напишутся полукружія, и между тремя полукружіями помѣстится кругъ EF, касательный ко всѣмъ имъ, и въ немъ проведенъ будетъ поперечникъ EF параллельный къ поперечнику AC. Надлежитъ сыскать отношеніе поперечника AC къ поперечнику EF.

Протяни AE, EB и CF, FB: то CB, AB будутъ прямыя, по доказанному въ первомъ предложеніи; и проведи также двѣ линіи FGA, EHC: то докажется, что и сіи будутъ прямыя, равно какъ и DE, DF; и протяни DI, DL, и еще EM, FN продолживъ оныя до O, P. Итакъ, поелику въ треугольникѣ AED прямая AG перпендикулярна къ ED, а DI перпендикулярна къ AE, и онѣ пресѣкаются взаимно въ M: то и EMO будетъ перпендикулярна, какъ показано нами въ сочиненіи о свойствахъ треугольниковъ, и чему доказательство предполагаемо было въ

предыдущемъ предложеніи. Подобно и FP будетъ перпендикулярна къ CA. И поелику два угла при L и B суть прямые, то DL параллельна къ AB. Потому же и DI параллельна къ CB. Чего ради какъ AD къ DC, такъ AM къ FM, и такъ AO къ OP*; и какъ CD къ DA, такъ CN къ NE, *2, 11. и такъ CP къ PO. Но AD есть полуторная прямой DC: посему и AO полуторная прямой OP, и PO прямой CP*. Итакъ *d, V. три прямыя AO, OP, PC пропорціональны; и въ какой мѣрѣ PC есть 4, въ такой будетъ OP 6, AO 9 и CA 19. И поелику PO равна EF, то какъ AC къ EF, такъ 19 къ 6. Итакъ сказанное въ предложеніи найдено.

Такимъ же образомъ, естьли AD въ отношеніи къ DC будетъ какая ниесть другая, на примѣръ: $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, или иная: то должно будетъ разсуждать и поступать по предыдущему. (133).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели около квадрата опишется кругъ, и въ немъ же впишется другой: то описанный будетъ двукратный вписаннаго.

Пусть будетъ кругъ AB описанный

около квадрата AB, и въ немъ вписанный CD; и пусть будетъ квадрата поперечникъ AB, то онъ же и поперечникъ круга описаннаго. Проведи круга вписаннаго поперечникъ CD параллельный къ сторонѣ AE, то онъ ей равенъ. И поелику квадратъ изъ AB двукратный квадрата изъ AE или изъ DC; и отношеніе квадратовъ изъ поперечниковъ круговъ есть тоже, что и отношеніе круга къ
2, XII. кругу: слѣдственно кругъ AB есть двукратный круга CD. Ч И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели въ кругѣ помѣстится нѣкая прямая AB, и продолжится впрямъ, и положится BC равная радіусу круга, и протянута будетъ прямая отъ C до центра D круга, и продолжится до E: то дуга AE будетъ трикратная дуги BF.

Проведи EG параллельную къ AB; и протяни DB, DG. Поелику два угла DEG, DGE суть равные, то уголъ GDC дву-
32, I. кратный угла DEG. Поелику же уголъ BDC равенъ углу BCD, и уголъ CEG равенъ углу ACE; посему уголъ GDC будетъ двукратный и угла CDB, а цѣлый BDG трикратный угла BDC: чего ради и ду-

та BG, равная дугѣ AE, будетъ прикратная дуги BF*. *33, VI.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя AB, CD, не проходящія чрезъ центръ, пресѣкаются взаимно подъ прямыми углами: то двѣ дуги AD, CB будутъ равны двумъ дугамъ AC, DB.

Проведи параллельный къ AB поперечникъ EF, то онъ разсѣчетъ CD по поламъ въ G*: посему EC равна ED. И поелику *3, III. какъ дуга EDF, такъ и дуга ECF есть полукружіе; а дуга ED равна дугѣ EA съ дугою AD: посему дуга CF съ двумя дугами EA, AD будетъ равна полукружію. Но EA равна BF: посему и дуга CB съ дугою AD равна полукружію. Слѣдственно и остальныя двѣ дуги EC, EA, то есть дуга AC, съ дугою DB, равны полукружію же. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Пусть будетъ кругъ ABC, и DA касательная къ нему, и DB сѣкущая оный, и еще DC касательная; и пусть будетъ проведена параллельная къ DB прямая CE, и протянута EA, пресѣкающая DB

въ F; и отъ F пусть проведена будетъ перпендикулярная къ CE прямая FG. Говорю, что она разсѣчетъ прямую CE по поламъ въ G.

Протяни AC. Поелику DA касательная къ кругу, а AC сѣкущая оный: то уголъ DAC равенъ углу въ накосьлежащемъ от-
32, III. рѣзкѣ AC, то есть углу AEC. А сей равенъ углу AFD, ибо CE, BD параллельны: посему углы DAC, AFD взаимно равны. Итакъ въ треугольникахъ DAF, AHD углы AFD, HAD суть равны, и уголъ при D общій: и потому прямоугольникъ въ FD,
4 и 17, VI. DH равенъ квадрату изъ DA, то есть изъ DC*. И поелику какъ FD къ DC, такъ DC къ DH, а уголъ при D общій; слѣдственно треугольники DFC, DCH подоб-
6, VI. ны: а посему уголъ DFC равенъ углу DCH, который равенъ углу DAH. Сей же равенъ
5, I. углу AFD: чего ради углы AFD, CFD взаимно равны. Но уголъ DFC равенъ углу FCE, и по доказанному, уголъ DFA равенъ углу AEC: посему треугольника FCE углы при C, E взаимно равны. Сверхъ того углы при G прямые, и сторона GF
26, I. общая: слѣдственно CG равна GE. Итакъ CE разсѣчена по поламъ въ G. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя AB, CD пресѣкаются въ точкѣ E, которая не центръ: то квадраты изъ AE, BE, EC, ED равны квадрату изъ поперечника.

Проведи поперечникъ AF; и протяни AC, AD, CF, DB. И поелику уголъ AED прямый, то онъ равенъ углу ACF; и уголъ ADC равенъ углу AFC, ибо стоятъ на тойже дугѣ AC: посему и остальные двухъ треугольниковъ ADE, AFC углы CAF, DAE взаимно равны: слѣдственно и дуги CF, DB взаимно равны*; а посему *26, III. равны и хорды ихъ. И поелику квадраты изъ DE, EB равны квадрату изъ BD, то есть изъ CF, и квадраты изъ AE, EC квадрату изъ CA; квадраты же изъ CF, CA равны квадрату изъ FA, то есть изъ поперечника: посему всѣ квадраты изъ AE, EB, CE, ED равны квадрату изъ поперечника. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Пусть будетъ полукружіе на поперечникѣ AB; и пусть проведены будутъ отъ C двѣ касательныя къ полукружію

въ точкахъ D, E, и протянуты EA, DB, пресѣкающіяся взаимно въ F; и пусть прятянута будетъ CF и продолжена до G. Говорю, что CG перпендикулярна къ AB.

Протяни DA, EB. Поелику уголъ BDA прямый, то остальные два угла DAB,
(14). DBA треугольника DAB равны прямому. Но и уголъ AEB прямый: слѣдственно тѣ углы и ему равны. Придай обще уголъ FBE: посему два угла DAB, ABE равны угламъ FBE, FEB, то есть углу DFE, внѣшнему треугольника FBE. И поелику CD касательная къ кругу, и DB сѣкущая оный; то уголъ CDB равенъ углу
32, III. DAB. Потому же и уголъ CEF равенъ углу EBA. Чего ради углы CEF, CDF равны углу DFE. Доказано же нами въ книгѣ о четыреугольникахъ, что ежели между двумя прямыми равными, взаимно встрѣчающимся въ нѣкоей точкѣ, каковы CD, CE, проведутся двѣ прямыя, также взаимно пресѣкающіяся, каковы DF, EF, и уголъ ими содержимый, каковъ при F, будетъ равенъ двумъ угламъ составленнымъ сими линіями съ прежними, каковы углы CEF, CDF; то протянутая отъ точки встрѣчи до пресѣченія прямая, какова CF, равна каждой изъ прямыхъ

встрѣчающихся, какъ CD или CE (134): посему CF равна CD; а посему уголъ CFD равенъ углу CDF, то есть углу DAG. Но уголъ CFD съ угломъ DFG равенъ двумъ прямымъ: посему и уголъ DAG съ угломъ DFG равенъ двумъ прямымъ: а посему и остальные четыреугольника ADFG углы ADF, AGF равны двумъ прямымъ. Но уголъ ADB прямый, слѣдовательно и уголъ AGC прямый: и потому CG перпендикулярна къ AB. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя AB, CD взаимно пресѣкаются, изъ коихъ AB поперечникъ а CD не поперечникъ; и отъ точекъ A, B проведены будутъ перпендикулярныя къ CD прямыя AE, BF: то оными отнимутся прямыя CF, DE взаимно равныя.

Протяни EB; и отъ центра, который пусть будетъ въ I, проведи перпендикулярную къ CD прямую IG, и продолжи оную до H на EB. И поелику IG, проходя чрезъ центръ, перпендикулярна къ CD; то разсѣкаетъ оную по поламъ въ G. Еще же, поелику IG, AE къ ней перпендикулярны, то онѣ параллельны взаимно. И

2, VI. какъ BI равна IA; посему BH равна HE. По равенству же ихъ и по причинѣ что BF параллельна къ HG, будетъ FG равна GE. Чего ради и остальныя отъ равныхъ GC, GD прямыя FC, ED суть равныя. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Пусть будетъ полукружіе AB; и пусть отъ поперечника его отнимутся равныя прямыя AC, BD, и на AC, CD, DB напишутся полукружія; и пусть будетъ двухъ полукружій AB, CD центръ E, и перпендикулярная къ AB прямая EF, которая продолжена до G. Говорю, что кругъ, коего поперечникъ FG, равенъ фигурѣ называемой Салинонъ, то есть поверхности, содержимой полукружіемъ большимъ, двумя малыми внутри его лежащими, и однимъ среднимъ лежащимъ внѣ.

Поелику DC разсѣчена по поламъ въ E, и приложена впрямъ къ ней прямая CA; то квадраты изъ DA, CA суть двукратные квадратовъ изъ DE, EA*. Но FG равна DA: посему квадраты изъ FG, AC двукратны квадратовъ изъ DE, EA. И поелику AB двукратна прямой AE, а CD двукратна прямой ED: то квадраты изъ

*10, II.

АВ, DC четырекратны суть квадратовъ изъ DE, EA*, то есть двукратны квад- *(22). ратовъ изъ GF, AC. Посему и два круга, коихъ поперечники АВ, DC, двукратные суть двухъ круговъ, коихъ поперечники GF, AC: а посему половины круговъ, коихъ поперечники АВ, CD, равны двумъ кругамъ, коихъ поперечники GF, AC. Но кругъ, коего поперечникъ AC, равенъ двумъ полукружіямъ AC, BD: посему, отнявъ общія два полукружія AC, BD, будетъ остальная фигура, содержимая въ четырехъ полукружіяхъ АВ, CD, DB, AC, называемая Салиnонъ, равна кругу, коего поперечникъ FG. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Пусть будетъ АВ полукружіе, AC сторона пятиугольника, и дуга AD половина дуги AC; и пусть будетъ протянута CD и продолжена до E, и еще протянута DB, пресѣкающая прямую CA въ F; и отъ F пусть проведена будетъ перпендикулярная къ АВ прямая FG. Говорю, что EG равна радіусу круга.

Протяни CB, и возьми центръ H, и протяни HD, DG и AD. И поелику уголъ ABC, стоящій на сторонѣ пятиуголь-

ника, есть двѣ пятыхъ прямаго угла (135), то каждый изъ двухъ угловъ CBD, DBA будетъ пятая часть прямаго. Но уголъ
20, III. DHA двукратный угла DBH: посему уголъ DHA будетъ двѣ пятыхъ прямаго. И поелику двухъ треугольниковъ CBF, GBF углы при B суть равные, при G, C прямые, и сторона FB общая: посему BC равна BG. Чего ради двухъ треугольниковъ CBD, GBD стороны CB, BG взаимно равны, такожъ и углы при B, и сторона BD общая: посему и углы BCD, BGD суть равные. Но каждый изъ нихъ есть шесть пятыхъ прямаго (136), и равенъ углу DAE
b, III. внѣшнему четыреугольника BADC, который въ кругѣ: слѣдственно остальный уголъ DAB равенъ остальному DGA; а посему DA равна DG. И поелику уголъ DHG есть двѣ пятыхъ, а уголъ DGH шесть пятыхъ прямаго: посему остальный уголъ HDG будетъ двѣ пятыхъ прямаго, а посему DG равна GH. Еще же, поелику уголъ ADE, внѣшный четыреугольника ADCB вписаннаго въ кругѣ, равенъ углу CBA: то и онъ двѣ пятыхъ прямаго, и слѣдовательно равенъ углу GDH. Итакъ поелику треугольниковъ EDA, HDG равны взаимно, и углы EDA, HDG, и углы

DGH, DAE, и стороны DA, DG: слѣдовательно и EA равна HG. Придай обще AG: посему EG равна AH. Ч. И Д. Н.

Отсюда явствуетъ, что прямая DE равна радіусу круга. Ибо какъ уголъ DAE равенъ углу DGH, то и DE равна DH*. *26, I. Сверхъ того говорю, что EC разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ D, и большій отрѣзокъ будетъ DE. Ибо ED есть сторона шестиугольника, а DC сторона десятиугольника, и слѣдовательно сіе доказано уже въ Началахъ (137).

ПРИМѢЧАНІЯ

КЪ КНИГАМЪ

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ,

ИЗМѢРЕНІЮ КРУГА

И ЛЕММАМЪ.

ПРИМѢЧАНІЯ

КЪ КНИГѢ ПЕРВОЙ

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ.

---

(1) Изъ опредѣленія 18 книги XI Началъ видно, что естьли конусъ разсѣченъ плоскостію, чрезъ его ось проходящею; то сѣченіе будетъ треугольникъ, имѣющій уголъ при вершинѣ конуса прямый, когда конусъ прямоугольный: тупый, когда тупоугольный: а острый, когда остроугольный. Слѣдственно, естьли конусъ пересѣченъ будетъ плоскостію перпендикулярною къ одной изъ его сторонъ, то, на основаніи извѣстныхъ ѳеоремъ Криволинейной Геометріи (*), въ остроугольномъ будетъ Эллипсисъ, ибо сѣкущая плоскость встрѣтитъ другую сторону подъ вершиною: въ тупоугольномъ Иперболa, ибо встрѣтитъ оную надъ вершиною: а въ прямоугольномъ Парабола, ибо нигдѣ оной не встрѣтитъ, то есть будетъ параллельна къ ней.

По сей причинѣ Архимедъ и прочіе Геометры, бывшіе до Аполлонія, обыкновенно называли, эллипсисъ сѣченіемъ остроугольнымъ, иперболу тупоугольнымъ, а параболу, прямоугольнымъ.

(*) См. Начальныя Основанія чистой Маѳематики, соч. Фусса, части III въ книгѣ. 3.

(2) Архимедъ, подобно Эвклиду и другимъ древнимъ Геометрамъ, называетъ радіусъ *прямою отъ центра.*

(3) Въ подлинникѣ значится: *проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности круга, который есть основаніе отрѣзка.* Я вездѣ сократилъ подобныя сему выраженія такъ, какъ въ настоящемъ случаѣ.

(4) Есть полуторный шара ἡμιόλιός ἐςι τῆς σφαίρας значитъ: есть вполтора раза больше шара, или иначе: равенъ тремъ половинамъ шара.

(5) Вторая часть сего періода въ подлинникѣ весьма темна, повидимому отъ перемѣнъ сдѣланныхъ переписчиками; но поелику она не составляетъ никакой важности въ отношеніи къ предмѣту, то я на семъ болѣе останавливаться не буду.

(6) Въ подлинникѣ сказано: ἀξιώματα.

(7) Подъ именемъ кривыхъ здѣсь разумѣются не только собственно кривыя, но и ломанныя и смѣшенныя, то есть всѣ тѣ, кои не суть прямыя, или, что все тоже, кои не равно лежатъ всѣми своими точками.

Собственно кривая есть та линія, которая пресѣкается прямою всегда токмо въ точкахъ, или которая съ прямою, на нее какъ имеетъ падающею, имѣетъ общія точки, но общей части не имѣетъ.

А ломанная есть та линія, которая составлена изъ прямыхъ, впрямь нележащихъ.

Смѣшенная же, которыя часть или нѣкоторыя части суть собственно кривыя, а часть или нѣкоторыя части суть прямыя линіи.

Кривыя линіи могутъ лежать или на тойже плоскости, или* нѣтъ. Изъ сихъ послѣднихъ тѣ, кои пресѣкаются плоскостію токмо въ точкахъ, и слѣдовательно на ней не могутъ лежать, называются у новыхъ Геометровъ двояко-кривыми. Архимедъ, говоря о кривыхъ, всегда разумѣетъ тѣ, кои суть на тойже плоскости.

(8) Пусть, на примѣръ, взята будетъ кривая ABC, (фигура 1) и чрезъ концы ея A, C пусть проведена будетъ неопредѣленная прямая EF; то явно, что сія кривая ABC падаетъ вся по туже сторону прямой EF. Но пусть взята будетъ кривая DABC, и чрезъ ея концы D, C пусть проведена будетъ опять неопредѣленная прямая EF; то въ семъ случаѣ кривой часть ABC падаетъ по туже сторону прямой EF, а часть AD по самой EF, но никакая часть по другую ея сторону не падаетъ.

(9) Для объясненія сего опредѣленія, замѣтимъ съ Пейрардомъ (*), что всякая линія имѣетъ двѣ стороны во всемъ своемъ протяженіи, правую и лѣвую. Такъ въ фиг. 2. кривая ABCDE, простираясь отъ A къ E, правую сторону будетъ имѣть,

(*) Oeuvres d'Archimède, par Peyrard. 1807 pag. 448.

гдѣ ABCDE, а лѣвую гдѣ AbcdE. Теперь явно, что кривая ABCDE будетъ вся выпукла со стороны BCD, а вогнута со стороны bcd, ибо прямыя, проводимыя чрезъ ея двѣ точки, всегда падаютъ или со стороны bcd, какъ AE, или нѣкоторыя по самой кривой, какъ BE, но ни которая со стороны BCD не падаетъ. Напротивъ того въ фиг. 3. кривая ABCDE не есть выпукла съ тойже стороны, ибо нѣкоторыя прямыя, проводимыя чрезъ двѣ ея точки, падаютъ не по одну сторону. Такъ прямой AE часть AC падаетъ со стороны bc, а часть CE со стороны CD, и потому часть ея выпукла со стороны B, а часть со стороны d, то есть съ противной.

Изъ сего явствуетъ, что кривую, которая выпукла съ тойже стороны, проводимыя чрезъ двѣ ея точки и не имѣющія общей съ нею части прямыя, пресѣкаютъ токмо въ двухъ точкахъ; а которая выпукла не съ тойже стороны, ту могутъ пресѣкать болѣе нежели въ двухъ точкахъ.

(10) Кто понялъ опредѣленія 1 и 2, тому не трудно понять 3 и 4.

(11) Слѣдственно шаровый вырѣзокъ происходитъ чрезъ обращеніе круговаго вырѣзка около радіуса, пока оный возставится тамъ, откуда началось его обращеніе.

(12) Слѣдственно тѣлесный ромбъ происходитъ чрезъ обращеніе треугольника около основанія, при коемъ углы суть острые, пока оный возстановится тамъ, откуда началось его обращеніе. При-

чемъ высота треугольника напишетъ кругъ, который есть общее основаніе обоихъ конусовъ, составляющихъ ромбъ; а основаніе треугольника будетъ высота ромба.

Подобно, и отрѣзокъ шаровый происходитъ чрезъ обращеніе полуотрѣзка круговаго около неподвижной его оси или высоты (*), пока оный возставится тамъ, откуда началось его обращеніе.

(13) Подъ именемъ Началъ или положеній *λαμβανομενα* разумѣются здѣсь такія предложенія, кои принимаются за истинныя; слѣдовательно почти то, что называютъ Логики postulatum или principium petitionis; хотя впрочемъ почти очевидная справедливость сихъ предложеній позволяетъ допустить оныя какъ общія понятія или аксіомы.

(14) Сіе начало нѣкоторые неправильно считали за Архимедово опредѣленіе прямой линіи.

(15) Начало сіе и слѣдующія три, въ отношеніи собственно кривыхъ линій и поверхностей, тщетно разные Геометры доказать покушались. Ихъ доказательства, или скрытно предполагаютъ сіи же начала, а это означаетъ доказывать idem per idem; или допускаютъ, что кривыя линіи состоятъ изъ безконечно малыхъ прямыхъ линій: вещи уму противныя или непонятныя. Только доказательства знаменитаго Гурьева не имѣ-

(*) Высотою отрѣзка круговаго называется перпендикуляръ изъ средины основанія возставленный, и ограниченный дугою отрѣзка.

ютъ, какъ кажется, сихъ недостатковъ, но и оныя едва ли можно назвать совершенно Геометрическими (*).

(15) Еще менѣе того можно доказать сіе начало, да и доказывать не нужно, ибо оно есть настоящая аксіома. Странно, что Пейрардъ думаетъ (**), будто сіе начало основывается на пр. 1, книги X Эвклида; между тѣмъ когда очевидно, что послѣднее основывается на первомъ. Нѣкоторые еще думаютъ, что сія аксіома есть 4 опредѣленіе книги V Эвклида; но и сіе мнѣніе несправедливо, ибо 4 опредѣленіе основывается токмо на Архимедовомъ началѣ, но со всѣмъ не есть сіе начало, что легко усмотрѣть какъ изъ самаго сего опредѣленія, такъ и изъ моего при-
(40). мѣчанія.

(16) По древнѣйшимъ изданіямъ, Архимедъ въ семъ и другихъ случаяхъ вмѣсто BA, AL, говоритъ *συναμφότερος* BAL. Мы почли за удобнѣйшее выражаться такъ, какъ въ Эвклидовыхъ Началахъ.

*13, V. (17) Посему * EG къ GF имѣетъ меньшее отношеніе, нежели CA къ CB. А посему, и проч.

пр. 2. (18) Для сего, продолжи KL (фиг. 4) до N;
3, I. и положи KN равную H; и изъ K разстояніемъ
*пр. 3. KN напиши кругъ *, который пресѣчетъ прямую

(*) См. Опытъ о усовершенствованіи Елементовъ Геометріи, стр. 239—247.

(**) Oeuvres d'Archimède, pag. 449.

LM въ нѣкоей точкѣ M; и протяни KM*. И по- *тр. 1.
елику KM равна KN, которая равна H; то явствуетъ, что отъ K помѣщена прямая KM равная H*. *опр. 15, I.

(19) И дѣйствительно, пусть будутъ два треугольника GTN, KLM (фиг. 5) прямоугольные при T, L; и пусть уголъ TGN будетъ меньше угла LKM. На прямой KL, при точкѣ K, составь уголъ LKR равный углу TGN*. Посему и остальный уголъ *23, I.
GNT равенъ остальному KRL*. Чего ради тре- *32, I.
угольникъ GTN есть равноугольный треугольнику KLR: и потому, какъ NG къ GT, такъ RK къ KL*. И поелику MK больше KR, и KL есть дру- *4, VI.
гая прямая; а большая величина къ тойже имѣетъ большее отношеніе*: посему MK къ KL *8, V.
имѣетъ большее отношеніе, нежели KR къ KL. Доказано же, что какъ NG къ GT, такъ KR къ KL; посему MK къ KL имѣетъ большее отношеніе, нежели и NG къ GT*. *13, V.

(20) Чего ради QP къ NC тѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели A къ B.

(21) Итакъ, сторона многоугольника описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣетъ меньшее отношеніе, нежели данныя величины, большая A къ меньшей B.

(22) А таже величина къ большей имѣетъ меньшее отношеніе, нежели къ меньшей*; посему мно- *8, V.
гоугольникъ вписанный къ кругу имѣетъ меньшее

отношеніе, нежели къ многоугольнику вписанному; и слѣдовательно тѣмъ паче, и проч.

(23) Какъ то легко вывести изъ доказательства 11 предложенія XI книги Началъ.

(24) Что доказать можно слѣдующимъ образомъ: Пусть будетъ кругъ ABC (фиг. 6), коего радіусъ равенъ сторонѣ конуса. Составимъ при центрѣ углы и треугольники ADB, BDC, CDA', равные конуса угламъ и треугольникамъ ADB, BDC,
22 и 23, I. CDA, и еще уголъ CDG равный углу CDB, и протянемъ CG, GA': посему треугольникъ BCD равенъ треугольнику CDG. И поелику два угла
20, XI. ADB, BDC больше угла CDA; то, по отнятіи равныхъ угловъ BDC, CDG, будетъ уголъ ADB больше угла GDA'; посему и треугольникъ ADB
24, I. больше треугольника GDA'. Итакъ треугольники ADB, BDC больше треугольниковъ CDG, GDA'; сіи же суть больше треугольника A'DC: слѣдственно тѣмъ паче треугольники ADB, BDC суть больше треугольника CDA'. Подобно докажется, что и каждые другіе два треугольника суть больше остальнаго.

(25) Посему цѣлая коническая поверхность, что между AD, DC, купно съ отрѣзками AEB, BFC, есть больше треугольниковъ ADB, BDC. Но пространство H не меньше тѣхъ отрѣзковъ, по положенію: чего ради, и проч.

(26) Слѣдственно и половина первыхъ прямоугольниковъ больше половины послѣднихъ, то

есть треугольники AED, DEC суть больше треугольниковъ AGE, GEF, FEC.

(27) Судя по излишнимъ повтореніямъ въ семъ періодѣ встрѣчающимся, можно полагать, что переписчики или толкователи сдѣлали въ немъ нѣкоторыя перемѣны.

(28) И дѣйствительно, поелику уголъ DBF (фиг. 7) прямый, то DF больше BF*. Но BF равна FC, *19, I.
посему DF больше FC; а посему и треугольникъ DBF больше треугольника FBC*, а тѣмъ паче *I, VIIиЪ, V.
больше облежащаго отрѣзка FBC. Потому же и треугольникъ DBG больше отрѣзка ABG. Чего ради цѣлый треугольникъ DGF больше отрѣзковъ ABG, CBF, и слѣдовательно больше половины отрѣзка ADC.

(29) То есть, прямыя EK, EL, EM, EN, EO, EP.

(30) И протянуты AB, CD.

Читатели замѣтятъ, что подобныя сему дополненія здѣлать нужно и въ другихъ нѣкоторыхъ предложеніяхъ.

(31) Посему цилиндрическая поверхность, отнимая прямыми AC, BD, купно съ отрѣзками AE, EB, CF, FD, больше параллелограмма ACDB купно съ пространствомъ G; отрѣзки же суть, по положенію, не больше пространства G: чего ради, и проч.

(32) На основаніи слѣдующаго предложенія:

Ежели первая величина ко второи имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой;

и будетъ первая больше второй, то и третья больше четвертой.

Пусть первая величина A (ф. 8) ко второй B имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья C къ четвертой D; и пусть будетъ A больше B. Говорю, что и C больше D.

Вообрази величину E, которая къ D имѣетъ
ак. а, (47). тоже отношеніе, что и A къ B. Итакъ C къ D
13, V. имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ D: посему C больше E. И поелику A къ B, по положенію, имѣетъ тоже отношеніе что и E къ D,
b, V. и A больше B; посему и E больше D. Доказано же, что C больше E, слѣдственно тѣмъ паче C больше D.

(33) Ибо треугольники KTD, FRL, имѣя одина-
1, VI. кую высоту, суть взаимно какъ основанія TD, RF; по доказанному же въ первой части предложенія, какъ TD къ RF, такъ квадратъ изъ TD къ квадрату изъ G: посему какъ треугольникъ KTD, и проч.

(34) Пусть будетъ A (фиг. 9) центръ основанія конуса, L вершина, ML сторона, а LA ось; и отъ A на сторону KH равносторонняго многоугольника KHF вписаннаго въ основаніи, пусть будетъ
12, I. опущенъ перпендикуляръ AM; и проведи чрезъ G
31, I. параллельную къ ML прямую GN; и протяни LG: посему LG перпендикулярна къ KH, и слѣдовательно есть высота одного изъ треугольниковъ
опр. 4, VI. пирамиды вписанной въ конусъ. И поелику GN параллельна къ ML, то треугольникъ NAG есть

равноугольный треугольнику LMA*: посему AM къ ML имѣетъ тоже отношеніе, что AG къ GN. Но AG къ GN имѣетъ большее отношеніе, нежели къ GL*, ибо GL больше GN: посему и AM къ ML, то есть C къ D, имѣетъ большее отношеніе, нежели AG къ GL*. А какъ AG къ GL, такъ одинъ треугольникъ многоугольника въ основаніи вписаннаго, къ одному треугольнику вписанному въ конусѣ пирамиды, и такъ весь многоугольникъ къ ея поверхности: чего ради C къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели многоугольникъ вписанный въ кругѣ, къ поверхности пирамиды вписанной въ конусѣ.

* 29, I.

* 8, V.

* 13, V.

(35) И дѣйствительно, поелику поверхность больше многоугольника вписаннаго въ кругѣ B; то многоугольникъ описанный около круга B къ поверхности пирамиды имѣетъ меньшее отношеніе, нежели къ вписанному*. Но тотъ многоугольникъ къ вписанному имѣетъ, какъ сказано, меньшее отношеніе, нежели кругъ B къ поверхности конуса: слѣдственно тѣмъ паче многоугольникъ описанный около круга B къ поверхности пирамиды имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ B къ поверхности конуса; а посему и премѣненіемъ*.

* 8, V.

* 8, V.

(36) Нетрудно замѣтить, что Архимедово доказательство есть частное, ибо оно относится токмо къ тому случаю, когда параллелограммъ CAG будетъ прямоугольный. Общее же доказательство сей леммы есть слѣдующее.

Поелику DF параллельна къ AG, то какъ BA

4, VI. къ AG, такъ BD къ DF: посему прямоугольникъ
16, VI. въ BA, DF равенъ прямоугольнику въ BD, AG.
Но прямоугольникъ въ BA, DF равенъ прямоуголь-
1, II. никамъ въ BD, DF, и въ AD, DF: посему и прямоугольникъ въ BD, AG равенъ прямоугольникамъ въ BD, DF, и въ AD, DF. Придай общій прямоугольникъ въ DA, AG: посему прямоугольникъ въ BD, AG купно съ прямоугольникомъ въ
1, II. DA, AG, то есть прямоугольникъ въ BA, AG, равенъ прямоугольникамъ въ BD, DF и въ AD, DF, и еще въ AD, AG, изъ коихъ два послѣдніе равны прямоугольнику, содержимому въ DA и въ прямой сложенной изъ DF, AG.

(37) Какъ явствуетъ изъ слѣдующаго:

Ежели будутъ три круга такіе, что квадраты изъ радіусовъ двухъ первыхъ равны квадрату изъ радіуса круга третьяго; то и первые два круга будутъ равны третьему.

Пусть будутъ таковые круги K, H, L. Говорю, что кругъ L равенъ кругамъ K, H.

Поелику круги K, H суть взаимно какъ квад-
2, XII. раты изъ радіусовъ; то совокупленіемъ, какъ круги K, H къ кругу H, такъ квадраты изъ радіусовъ круговъ K, H къ квадрату изъ радіуса
18, V. круга H. А и круги H, L суть взаимно какъ квадраты изъ радіусовъ: посему равномѣстно, какъ круги K, H къ кругу L, такъ квадраты изъ радіусовъ круговъ K, H къ квадрату изъ радіуса
22, V. круга L. Но квадраты изъ радіусовъ круговъ K, H равны квадрату изъ радіуса круга L: посему и круги K, H равны кругу L.

Подобно докажется естьли, вмѣсто двухъ круговъ K, H, будетъ три и болѣе.

(38) Разумѣется: конусы равновысотные цилиндрамъ.

(39) То есть, коего число сторонъ будетъ четное.

(40) Здѣсь и въ нѣкоторыхъ другихъ мѣстахъ выраженіе: *прямыя сопрягающія стороны* (εὐθεῖαι ἐπιζευγνῦσαι τὰς πλευρὰς) замѣняю для краткости словомъ: *діагонали.*

(41) По подобію треугольниковъ KHF, SXF.

(42) Ибо, протянувъ GL, CK, поелику углы при K, L прямые*, и AK параллельна къ LE, *31, III. то треугольникъ GLE будетъ равноугольный треугольнику CKA. Посему какъ GL къ LE, такъ CK къ KA. Но какъ GL къ LE, такъ всѣ параллельныя діагонали многоугольника EFGH къ поперечнику FH, а какъ CK къ KA, такъ всѣ параллельныя діагонали многоугольника ABCD къ поперечнику BD круга ABCD*: посему какъ всѣ діаго- *22, I. нали многоугольника описаннаго къ поперечнику FH, такъ всѣ діагонали вписаннаго къ поперечнику круга ABCD. И изъ тѣхъ же треугольниковъ, какъ поперечникъ къ сторонѣ, такъ поперечникъ къ сторонѣ: посему равномѣстно, какъ всѣ діагонали многоугольника описаннаго къ его сторонѣ, такъ всѣ діагонали вписаннаго къ его сторонѣ*. *22, V. И потому двухъ прямоугольниковъ, коихъ основанія равны діагоналямъ многоугольниковъ, а вы-

соты равны сторонамъ ихъ, стороны пропорціо-
опр. 1, VI. нальны: слѣдственно прямоугольники подобны.

(43) Здѣсь предполагается извѣстнымъ слѣдующій вопросъ:

Между двухъ данныхъ прямыхъ найти двѣ среднія равноразнствующія, или что все тоже, ариѳметически пропорціональныя прямыя.

Пустъ будутъ даны двѣ неравныя прямыя AK, CG (фиг. 10), изъ коихъ AK большая. Отними отъ AK прямую KD равную CG, и остальную
9, VI. DA разсѣки на три равныя части въ E, F; и сдѣлай I равную KE, а H равную KF: то явно, что I, H будутъ двѣ искомыя среднія равноразнствующія.

(44) На основаніи слѣдующаго предложенія:

Ежели будутъ четыре равноразнствующія величины, изъ коихъ первая наибольшая; то первая къ четвертой имѣетъ отношеніе большее, нежели утроенное первыя ко второй.

Пустъ будутъ четыре равноразнствующія величины K, I, H, G (фиг. 11), изъ коихъ K бо̀льшая, такія, что чемъ разнится K отъ I, тѣмъ I отъ H, и H отъ G. Говорю, что K къ G имѣетъ отношеніе большее, нежели утроенное тойже K къ I.

Вообрази величину L, которая къ I имѣетъ
акс. a: (49). тоже отношеніе, что I къ K. И поелику K больше I, то I больше L; посему K, L больше
25, V. двукратной I; а посему, отнявъ обще L, I, будетъ избытокъ K предъ I больше избытка I

предъ L. Но избытокъ K предъ I равенъ избытку I предъ H: посему избытокъ I предъ H больше избытка I предъ L, слѣдственно L больше H. Вообрази еще величину M, которая къ L имѣетъ тоже отношеніе, что L къ I: то опять I, M больше двукратной L, а тѣмъ паче больше двукратной H; посему, отнявъ обще M, H, будетъ избытокъ I предъ H, то есть H предъ G, больше избытка H предъ M; слѣдственно M больше G. И поелику K, I, L, M суть непрерывно пропорціональныя*; то K къ M есть въ утроенномъ *опр. b, (43). отношеніи K къ I*. Но K къ G имѣетъ большее *опр. 11, V. отношеніе, нежели къ M*: посему и K къ G *8, V. имѣетъ большее отношеніе, нежели утроенное величины K къ величинѣ I*. *11, V.

(45) Здѣсь и въ нѣкоторыхъ другихъ мѣстахъ подъ именемъ Леммъ Архимедъ разумѣетъ, какъ кажется, такія предложенія, кои тогда помѣщались въ Начальныхъ сочиненіяхъ.

(46) Посему фигура описанная къ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели шаръ къ конусу O.

(47) И дѣйствительно, протянувъ AL, получимъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ HAL*, HAK: *31, III. какъ LH къ HA, такъ AH къ HK*, а посему пря- *сл. 8, VI. моугольникъ въ LH, HK равенъ квадрату изъ AH*. *17, VI.

Далѣе, вмѣсто: посему явно, что.... круга M, *лучше сказать:* и потому кругъ равный поверхности фигуры, меньше круга M равнаго квадрату изъ H.

(48) Ибо поверхность произведенная прямою MF, равна кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между FM и половиною прямыхъ FG,
*17, I. MN+; поверхность же произведенная прямою MA, равна кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между MA и половиною прямыхъ AB,
19, I. MN. Но FM больше MA, и FG больше AB: посему первая средняя пропорціональная больше второй: слѣдственно и кругъ больше круга, то есть поверхность произведенная прямою MF, больше поверхности произведенной прямою MA.

(49) Фигура описанная около вырѣзка, есть таже самая что и описанная около отрѣзка, который есть часть того вырѣзка.

(50) Изъ сего слѣдуетъ, что квадратъ изъ радіуса круга N больше прямоугольника въ CD, DO. Прямоугольникъ же, и проч.

(51) Посему квадратъ изъ радіуса круга N больше квадрата изъ AD; и кругъ N больше круга, коего радіусъ AD.

(52) Ибо, протянувъ FK, CL, поелику EK параллельна къ AL, и EF къ AC, и уголъ KEF равенъ углу LAC; то треугольникъ KEF будетъ равноугольный треугольнику LAC. Посему какъ EK къ AL, такъ EF къ AC, такъ и половина EF къ половинѣ AC. Подобно и о діагоналяхъ многоугольниковъ, параллельныхъ къ основаніямъ отрѣзковъ, докажется, что оныя суть взаимно какъ стороны EK, AL. Посему и какъ EK къ AL, такъ всѣ діагонали многоугольника описаннаго,

купно съ половиною основанія EF большаго отрѣзка, ко всѣмъ діагоналямъ вписаннаго, купно съ половиною основанія AC отрѣзка меньшаго*. *11 и 12, V. И потому двухъ прямоугольниковъ, коихъ основанія равны діагоналямъ многоугольниковъ, купно съ половиною основанія отрѣзковъ, а высоты равны сторонамъ оныхъ, стороны пропорціональны*; *опр. 6, V; и 34, I. слѣдственно прямоугольники подобны. Чего ради какъ прямоугольникъ къ прямоугольнику, то есть кругъ M къ кругу N*, такъ квадратъ изъ EK къ *11, V. квадрату изъ AL*. Но и многоугольники, будучи *20, VI. подобны, суть въ отношеніи тѣхъ же квадратовъ; посему и проч.

(53) Ибо круги M, N суть взаимно какъ квадраты изъ радіусовъ, а по доказанному въ предъидущемъ примѣчаніи, и какъ квадраты изъ EK и AL: посему квадраты изъ радіусовъ пропорціональны квадратамъ изъ EK и AL*; а посему EK, *11, V. AL суть въ томъже отношеніи, что и радіусы круговъ M, N*. *22, "

(54) Посему поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели поверхность отрѣзка къ кругу F*, *13, V. слѣдственно и премѣненіемъ*. И поелику поверхность, и проч. *8, V.

(55) И вообрази опять фигуры описанную и вписанную посредствомъ тѣхъ многоугольниковъ: то опять поверхность описанной къ поверхности вписанной будетъ имѣть тоже отношеніе, что и многоугольникъ описанный къ многоугольнику

вписанному. Многоугольникъ же къ многоугольнику имѣетъ, по положенію, меньшее отношеніе, нежели кругъ F къ поверхности отрѣзка: посему и поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ F къ поверхности отрѣзка; слѣдственно и премѣненіемъ. Но поверхность фигуры описанной больше круга F: посему и поверхность фи-
+(32). гуры вписанной больше поверхности вырѣзка+; что нелѣпо.

(56) Такъ же докажется и объ остальной части AECD шара (фиг. 12), которую Архимедъ то же называетъ вырѣзкомъ (въ предл. 3, кн. II), что она равна конусу, имѣющему основаніе равное поверхности шароваго отрѣзка ADC, а высоту равную радіусу шара. Но сіе можно еще доказать короче слѣдующимъ образомъ:

Вообрази конусъ F, коего основаніе равно поверхности шара, а высота равна радіусу онаго:
+36. посему конусъ F равенъ шару'. Вообрази еще два конуса G, H равновысотные первому, имѣющіе основаніе, конусъ G равное поверхности отрѣзка ABC, а конусъ H поверхности отрѣзка ADC: то конусъ G будетъ равенъ шаровому вырѣзку
11, XII. AEC, а оба конуса G, H будутъ равны конусу F, то есть шару. Слѣдственно, отнявъ конусъ G и равный ему вырѣзокъ AEC, будетъ остальный конусъ H равенъ остальному вырѣзку AECD.

КЪ КНИГѢ II.

(57) Сдѣлать таковый цилиндръ можно различными способами, изъ коихъ самый простый есть слѣдующій.

1. Пусть AQ (фиг. 13) будетъ цилиндръ. Продолжи его ось или высоту PQ, и сдѣлай QR равную половинѣ PQ, и около того же основанія A, а по высотѣ PR вообрази цилиндръ: то явно, что цилиндръ AR будетъ полуторный цилиндра AQ*. * 13, XII.

2. Пусть AQ будетъ конусъ. Раздѣли ось его PQ по поламъ въ S; и вообрази цилиндръ, имѣющій основаніе A, а высоту PS: то сей цилиндръ будетъ полуторный конуса AQ. Ибо цилиндръ AQ есть трикратный конуса AQ*, а двукратный цилиндра AS: посему два цилиндра AS равны тремъ конусамъ AQ, слѣдственно цилиндръ AS есть полуторный конуса AQ. * 10, XII.

(58) Какъ CD къ GH, такъ MN къ EF. Но, изъ положенія, какъ CD къ GH, такъ GH къ MN: посему какъ, и проч.

(59) Желающіе знать обстоятельно, что разумѣли древніе Геометры подъ словомъ: *данныя*, и какія оныхъ правила, могутъ найти все сіе въ сочиненіи Евклида подъ заглавіемъ: Data (δεδομένα).

(60) Вопросъ, какъ между данныхъ двухъ прямыхъ найти двѣ средніи пропорціональныя, имѣетъ многія рѣшенія; но въ числѣ ихъ нѣтъ ни одного

основывающагося на Начальной Геометріи, и потому мы на семъ останавливаться не будемъ, тѣмъ болѣе, что нѣкоторыя можно видѣть въ обыкновенныхъ Маѳематическихъ курсахъ. Замѣтимъ только, что всѣ извѣстныя донынѣ рѣшенія можно раздѣлить на три рода: Механическія, то есть находимыя посредствомъ нѣкоторыхъ орудій, Алгебраическія или Ариѳметическія, и наконецъ Геометрическія, основывающіяся на Вышней Геометріи.

(61) Такъ KL къ EF. Но какъ CD къ MN, то есть, и проч.

(62) Поелику въ треугольникѣ ABC отъ прямаго угла B опущенъ перпендикуляръ BE; то будетъ, какъ CA къ AB, такъ BA къ AE, и такъ CB къ BE. Посему какъ CA къ AE, такъ квадратъ изъ CA къ квадрату изъ AB, то есть такъ квадратъ изъ CB къ квадрату изъ BE.

(63) Равенъ конусу, коего основаніе кругъ около
15, XII. BF, а высота KH. И поелику конусъ, коего основаніе кругъ около BF а высота EK, равенъ двумъ конусамъ, имѣющимъ тоже основаніе, а высоту, одинъ HK а другой EH, ибо конусы, стоящіе на томъже основаніи, суть взаимно какъ ихъ
14, XII. высоты: посему, отнявъ общій конусъ BHF, будетъ остальный конусъ, коего основаніе кругъ около BF а высота KH, равенъ остальной фигурѣ BHFK. Но сей конусъ равенъ конусу N: слѣдственно конусъ N, то есть, и проч.

(64) По слѣдующему предложенію:

Ежели двѣ прямыя разсѣчены каждая на двѣ части, имѣющія тоже отношеніе; то квадраты изъ цѣлыхъ къ прямоугольникамъ въ частяхъ ихъ будутъ имѣть тоже отношеніе, взятыя попеременно.

Пусть будутъ двѣ прямыя KD, AC (фиг. 14) разсѣчены въ H, E такъ, чтобъ KH къ HD имѣла тоже отношеніе, что и AE къ EC. Говорю, что какъ квадратъ изъ KD къ прямоугольнику въ KH, HD, такъ квадратъ изъ AC къ прямоугольнику въ AE, EC.

Поелику какъ KH къ HD, такъ AE къ EC; то совокупленіемъ, какъ KD къ DH, такъ AC къ EC*: посему какъ квадратъ изъ KD къ квадра- *18, V.
ту изъ DH, такъ квадратъ изъ AC къ квадрату
изъ CE*. Еще же, поелику какъ KH къ HD, *22, VI.
такъ прямоугольникъ въ KH, HD къ квадрату
изъ HD*; а какъ AE къ EC, такъ прямоугольникъ *1, VI.
въ AE, EC къ квадрату изъ EC: посему какъ прямоугольникъ въ KH, HD къ квадрату изъ HD, такъ прямоугольникъ въ AE, EC къ квадрату изъ
EC*; такожъ и преложеніемъ. Доказано же, что *11, V.
какъ квадратъ изъ KD къ квадрату изъ HD, такъ квадратъ изъ AC къ квадрату изъ CE: посему, равномѣстно, какъ квадратъ изъ KD къ прямо-
угольнику въ KH, HD, такъ квадратъ изъ AC къ *22, V.
прямоугольнику въ AE, EC*.

(65) Въ примѣч. 47 доказано: что квадратъ изъ AD равенъ прямоугольнику въ AB, AC, квадратъ же изъ DB равенъ прямоугольнику въ AB, BC:

посему какъ квадратъ изъ AD къ квадрату изъ DB, такъ AC къ BC.

Слѣдственно въ прямоугольномъ треугольникѣ квадраты изъ сторонъ, кои около прямаго угла, суть взаимно какъ прилежащіе отрѣзки третьей стороны, на которую изъ прямаго угла опущенъ перпендикуляръ.

(66) Въ началѣ сей задачи, въ строеніи было положено: какъ KD, DX къ DX, такъ RX къ XB, а какъ LX къ XD, такъ KB, BX къ BX: посему, отдѣленіемъ и премѣненіемъ: какъ KD къ BR, такъ DX къ XB, и какъ LD къ KB, такъ DX къ XB. Но KD равна KB: посему какъ LD
11, V. къ KD, такъ KB къ BR, и такъ DX къ XB.

(67) По доказанному въ предъидущемъ примѣчаніи, какъ DX къ XB, такъ KB къ BR; но DX больше BX: посему и KB, то есть BF, больше BR.

(68) Совокупленіемъ и преложеніемъ, какъ DX къ LX, такъ BX къ FX; а посему равномѣстно,
22, V. какъ DL, и проч.

(69) Сіе доказать можно слѣдующимъ образомъ: Поелику шаръ данъ, то даны его поперечникъ DB и радіусъ KB или BF. Еще же, поелику отношеніе DX къ XB дано, то дано и отношеніе DX, XB къ XB, то есть DB къ XB: посему дана XB, слѣдовательно и XF. Чего ради и отношеніе BF къ FX будетъ данное. Но какъ BF къ FX, такъ LD къ LX: посему и отношеніе

LD къ LX есть данное. Притомъ доказано вначалѣ предложенія, что отношеніе LX къ XR дано, слѣдственно дано и отношеніе LR къ LX. Итакъ, поелику отношеніе каждой изъ прямыхъ RL, LD къ LX дано, то и отношеніе RL къ LD будетъ данное: ибо величины, къ тойже имѣющія отношеніе данное, и взаимно имѣютъ данное.

(70) Ибо доказано, что какъ RL къ LD, такъ квадратъ изъ KL къ квадрату изъ LD, и что какъ квадратъ изъ KL къ квадрату изъ LD, такъ квадратъ изъ DB къ квадрату изъ DX: посему какъ RL къ LD, такъ квадратъ изъ DB къ квадрату изъ DX.

(71) Изъ слѣдующей за симъ части доказательства не видно, чтобы точка H необходимо падала между B и R; однако сіе иначе быть не можетъ, какъ явствуетъ изъ слѣдующаго:

Въ предложеніи 3 доказано, что какъ LK къ KB, такъ KR къ RB (*): посему, премѣненіемъ и совокупленіемъ, какъ LR къ RK, такъ KR къ RB. Но LR къ RX имѣетъ большее отношеніе, нежели LR къ RK*: посему LR къ RX имѣетъ боль- *8, v.
шее отношеніе, нежели и KR къ RB, то есть FB къ BR*; а посему обращеніемъ, RL къ LX *(55), сл. 2.
имѣетъ меньшее отношеніе, нежели FB къ FR*. *1, v.
Чего ради FR меньше FH: ибо, по положенію RL къ LX имѣетъ тоже отношеніе, что BF къ FH.

(*) *Разумѣется: относя къ фигурѣ 5 предложенія сію пропорцію 3го: какъ KH къ HC, такъ HD къ DC.*

И поелику RL больше LX, то и BF больше FH. Итакъ точка H падаетъ между B и R, ибо доказано, что FH больше FR, а меньше FB.

(72) Должно замѣтить, что таковаго рѣшенія, ни на концѣ сей II Книги, ниже въ другомъ какомъ либо мѣстѣ Архимедовыхъ твореній не находится. Мы не знаемъ нынѣ, занимался ли Архимедъ, какъ здѣсь обѣщаетъ, особенно изслѣдованіемъ сего вопроса, или нѣтъ? но съ достовѣрностію можемъ сказать, что предполагаемаго здѣсь рѣшенія, именно основаннаго на Начальной Геометріи, ему найти невозможно было: ибо сей вопросъ, равно какъ и прежде упомянутый, о двухъ среднихъ пропорціональныхъ, будучи выраженъ алгебраически, даетъ уравненіе третьей степени, признакъ неоспоримый, что къ разрѣшенію онаго нужно употребить по меньшей мѣрѣ одно изъ такъ называемыхъ коническихъ сѣченій, либо циссоиду Діоклову, и проч. Симъ такожъ опровергается мнѣніе тѣхъ, которые думаютъ, что Архимедъ обѣщанное имъ рѣшеніе нашелъ, но что оно не дошло до насъ.

(73) Докажется же сіе слѣдующимъ образомъ:

Протяни EG, GF, EP, PF; KL, LH, HO, OK (фиг. 15). И поелику отрѣзки EGF, KLH подобны, то уголъ EGF равенъ углу KLH, слѣдственно и половина равна половинѣ, то есть уголъ VGF углу ULK; углы же при V, U суть прямые: посему треугольникъ VFG есть равноугольный треугольнику ULK, и будетъ, какъ GV къ

VF, такъ LU къ UK. Потому же и треугольникъ VFP есть равноугольный треугольнику UKO, и будетъ, какъ VF къ VP, такъ KU къ UO. Посему, равномѣстно, какъ GV къ VP, такъ LU къ UO; и совокупленіемъ, какъ GP къ PV, такъ LO къ OU. Но какъ SP къ GP, такъ OR къ LO: посему какъ PS къ PV, такъ OR къ OU*; и совокупленіемъ, какъ PS, PV къ PV, *22, V. то есть ZV къ VG, такъ OR, OU къ OU, то есть UY къ UL. Доказано же, что какъ GV къ VF, такъ LU къ UK: посему, равномѣстно, какъ ZV къ VF, такъ UY къ UK; а посему и какъ ZV къ EF, такъ UY къ KH*. Итакъ конусовъ *a, V. EZF, KYH поперечники основаній пропорціональны высотамъ: слѣдственно конусы EZF, KYH подобны*. *оп. 24, XII.

(74) И дѣйствительно, поелику отрѣзки даны, то даны и поперечники ихъ основаній и высоты: посему даны и EV, и квадратъ изъ EV, который равенъ прямоугольнику въ GV, VP. И какъ въ немъ GV дана, то дана VP: посему и поперечникъ и радіусъ шара суть данные; ибо поперечникъ равенъ даннымъ GV, VP. Итакъ, поелику PS, PV даны, то и отношеніе PS къ PV дано: посему и отношеніе PS, PV къ PV, то есть ZV къ VG, будетъ данное. Но VG дана, посему и ZV дана. А и EF дана: слѣдовательно и отношеніе ZV къ EF есть данное Ч. И Д. Н.

Такъ же докажется, что и въ отрѣзкѣ ABC отношеніе XT къ AB есть данное.

* *

(75) Какъ видно изъ примѣчанія 73, гдѣ было доказано, что какъ GV (фиг. 15) къ VP, такъ LU къ UO.

(76) Ибо, протянувъ HC, MN, будетъ, какъ BQ къ QC, такъ QC къ QH: посему какъ BQ къ QH, такъ квадратъ изъ BQ къ квадрату
сл. 2: 20, VI. изъ QC. Потому же какъ LR къ RN, такъ квадратъ изъ LR къ квадрату изъ RM. Но какъ BQ къ QH, такъ LR къ RN: посему какъ квадратъ изъ BQ къ квадрату изъ QC, такъ квадратъ изъ LR къ квадрату изъ RM; а посему и какъ
22, VI. BQ къ QC, такъ LR къ RM. Итакъ треуголь-
6, VI. ники QBC, RLM суть равноугольные: посему уголъ QBC равенъ углу RLM; а посему и уголъ въ отрѣзкѣ ABC равенъ углу въ отрѣзкѣ KLM:
оп. 11, III. слѣдственно отрѣзки подобны.

(77) И дѣйствительно, поелику DF дана, то и FB дана: посему и прямоугольникъ въ DF, FB, то есть квадратъ изъ AF, есть данный; а посему данная будетъ AF, слѣдственно и AC.

(78) И дѣйствительно, поелику BD больше DF, и ED есть другая величина; то ED къ DF
8, V. имѣетъ большее отношеніе, нежели ED къ DB: посему, совокупленіемъ, ED, DF къ DF имѣетъ
b, V. большее отношеніе, нежели ED, BD къ BD.

(79) Сдѣлано, какъ HL къ LK, такъ ED къ DF; то совокупленіемъ, какъ и проч.

(80) Ежели A къ B имѣетъ удвоенное, утроенное, и проч. отношеніе величины C къ D; то

говорится, что C къ D имѣетъ половинное, третное, и проч. отношеніе величины A къ B.

Изъ сего явствуетъ, что удвоенное отношеніе половиннаго отношенія A къ B, есть простое отношеніе A къ B, утроенное третнаго отношенія A къ B, есть простое отношеніе A къ B.

Ежели утроеннаго отношенія величины A къ B возмется половинное, то называется полуторное, а ежели удвоеннаго третное, то двухъ-третичное, итакъ далѣе.

(81) Ибо вообще, ежели къ двумъ неравнымъ величинамъ приложатся равныя или таже; то большая къ меньшей имѣетъ большее отношеніе, нежели сложенная къ сложенной.

Пусть будетъ AB (фиг. 16) больше CD, а BE равна DF: посему AE больше CF. Итакъ AE къ BE имѣетъ бо̀льшее отношеніе, нежели CF къ BE, то есть къ DF: посему, обращеніемъ, AE къ AB имѣетъ меньшее отношеніе, нежели CF къ CD*; слѣдственно преложеніемъ и премѣненіемъ, AB къ CD имѣетъ большее отношеніе, нежели AE къ CF*. *I, V. *g, V.

(82) По слѣдующей ѳеоремѣ: Ежели будутъ четыре прямыя такія, что первая ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то прямоугольникъ въ крайнихъ меньше прямоугольника въ среднихъ.

Пусть будутъ четыре прямыя A, B, C, D (ф. 8) такія, что A къ B имѣетъ меньшее отношеніе,

нежели C къ D. Говорю, что прямоугольникъ въ A, D меньше прямоугольника въ B, C.

Возьми къ тремъ прямымъ A, B, C четвертую пропорціональную E. Итакъ C къ E имѣетъ мень-
13, V. шее отношеніе, нежели C къ D: посему D меньше E, и прямоугольникъ въ A, D меньше прямо-
1 и Ь, V. угольника въ A, E. Прямоугольнику же въ A, E равенъ прямоугольникъ въ B, C, ибо A, B, C, E суть пропорціональныя: чего ради прямоугольникъ въ A, D меньше прямоугольника въ B, C.

Подобно докажется, что ежели будутъ три прямыя, изъ коихъ первая ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели вторая къ третьей; то прямоугольникъ въ крайнихъ меньше квадрата изъ средней.

(83) По слѣдующей ѳеоремѣ: Ежели будутъ четыре прямыя A, B, C, D такія, что прямоугольникъ въ крайнихъ меньше прямоугольника въ среднихъ; то первая ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой.

Пусть будутъ четыре прямыя A, B, C, D (фиг. 8) такія, что прямоугольникъ въ A, D меньше прямоугольника въ B, C. Говорю, что A къ B имѣетъ меньшее отношеніе, нежели C къ D.

Возьми къ тремъ прямымъ A, B, C четвертую пропорціональную E. Итакъ прямоугольникъ въ A, E равенъ прямоугольнику въ B, C: посему прямоугольникъ въ A, D меньше прямоугольника
1 и Ь, V. въ A, E, и D меньше E; слѣдственно C къ E
8, V. имѣетъ меньшее отношеніе, нежели къ D. Но

А къ В имѣетъ тоже отношеніе, что С къ Е: чего ради А къ В имѣетъ меньшее отношеніе, нежели С къ D*. * 13, V.

(84) То какъ НВ къ BN, такъ BN къ ВК: посему какъ НВ къ ВК, такъ квадратъ изъ BN къ квадрату изъ ВК*; и еще, совокупленіемъ и премѣненіемъ, какъ HN къ NK, такъ BN къ ВК. *сл.2:20, VI. Чего ради какъ квадратъ изъ HN къ квадрату изъ NK, такъ квадратъ изъ BN къ квадрату изъ ВК*. Доказано же, что какъ квадратъ изъ BN къ квадрату изъ ВК, такъ НВ къ ВК: посему, и проч. *22, VI.

(85) Ибо HF къ FK имѣетъ большее отношеніе, нежели HF, NF къ FK, NF, то есть нежели HN къ NK, по доказанному въ прим. 81.

(86) У Архимеда доказательства сего нѣтъ, но оное легко найти, какъ явствуетъ изъ слѣдующаго:

Ежели будутъ три прямыя такія, что квадратъ изъ первой къ квадрату изъ второй имѣетъ большее отношеніе, нежели вторая къ третьей; то первая къ третьей будетъ имѣть отношеніе большее, нежели полуторное второй къ третьей.

Пусть будутъ три прямыя АВ, С, D (фиг. 17) такія, что квадратъ изъ АВ къ квадрату изъ С имѣетъ большее отношеніе, нежели С къ D. Говорю, что АВ къ D имѣетъ отношеніе большее, нежели полуторное С къ D.

Между С, D возьми среднюю пропорціональную Е. Итакъ С къ D есть въ удвоенномъ отношеніи

С къ Е. И поелику квадратъ изъ АВ къ квадрату изъ С, то есть удвоенное отношеніе АВ къ С, есть, по положенію, больше отношенія С къ D,
* сл: е, V. то оно больше и удвоеннаго отношенія С къ Е*: посему и АВ къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели С къ Е. Пусть будетъ какъ Е къ С, такъ С къ BF: посему АВ больше BF. И поелику четыре прямыя BF, С, Е, D суть непрерывно пропорціональныя, то BF къ D есть въ утроенномъ отношеніи прямыя BF къ С*, то есть
* опр. 11, V.
прямыя С къ Е. Но С къ D есть въ удвоенномъ
* опр. 10, V. отношеніи прямыя С къ Е*, то есть С къ Е есть
† (80). въ половинномъ отношеніи С къ D†: слѣдственно BF къ D есть въ утроенномъ отношеніи половиннаго С къ D, то есть въ полуторномъ от-
† (80). ношеніи С къ D†. Но АВ къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели BF къ D: чего ради АВ къ D имѣетъ отношеніе большее, нежели полуторное С къ D. Ч. И Д. Н.

Въ предложеніи доказано, что изъ трехъ прямыхъ HF, FK, FG, квадратъ изъ HF къ квадрату изъ FK имѣетъ большее отношеніе, нежели KF къ FG: слѣдовательно, по доказанному теперь, HF къ FG имѣетъ отношеніе большее, нежели полуторное KF къ FG.

(87) Посему отношеніе отрѣзка BAD къ отрѣзку BCD есть тоже съ сложеннымъ изъ отношенія GH къ HC, и AH къ HC, и AH къ HF.

(88) А посему отношеніе отрѣзка къ отрѣзку есть тоже съ сложеннымъ изъ отношенія прямо-

угольника въ АН, HG къ квадрату изъ НС и изъ отношенія АН къ HF.

(89) Прямоугольникъ въ GH, НА на НА, значитъ, какъ извѣстно, параллелепипедъ, косго основаніе тотъ прямоугольникъ, а высота НА.

(90) Слѣдственно отношеніе отрѣзка къ отрѣзку есть тоже, что и квадрата изъ АН на HG къ квадрату изъ НС на HF. И потому доказать слѣдуетъ, что сіе отношеніе меньше, нежели удвоенное прямыя АН къ НС.

(91) Поелику кубъ изъ АВ къ кубу изъ ВС имѣетъ утроенное отношеніе стороны АВ къ сторонѣ ВС, то АВ къ ВС имѣетъ третичное отношеніе куба изъ АВ къ кубу изъ ВС: посему и удвоенное отношеніе АВ къ ВС, то есть отношеніе квадрата изъ АВ къ квадрату изъ ВС, то есть отношеніе поверхности къ поверхности, есть тоже что и полуторное куба изъ АВ къ кубу изъ ВС+. + (80).
Ч. И Д. Н.

Но изъ подобія треугольниковъ АВС, АНВ, какъ АВ къ ВС, такъ АН къ НВ: посему какъ кубъ изъ АВ къ кубу изъ ВС, такъ кубъ изъ АН къ кубу изъ НВ*; слѣдственно отношеніе поверхно- *37, XI.
сти къ поверхности есть тоже, что и полуторное отношеніе куба изъ АН къ кубу изъ НВ.

(92) Ибо кубъ изъ АН къ кубу изъ НВ имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній, АН къ НВ, и АН къ НВ, и АН къ НВ, то есть сложенное изъ отношеній квадрата изъ АН къ квадрату изъ НВ, и АН къ НВ.

(93) Поелику какъ АН къ НВ, такъ НВ къ НС: посему отношеніе квадрата изъ АН къ квадрату изъ НВ совокупленное съ отношеніемъ АН къ НВ, есть тоже, что отношеніе квадрата изъ АН къ квадрату изъ НВ совокупленное съ отношеніемъ НВ къ НС, то есть съ отношеніемъ квадрата изъ ВН къ прямоугольнику въ ВН, НС. Но и отношеніе квадрата изъ АН къ прямоугольнику въ ВН, НС сложенно изъ отношеній, квадрата изъ АН къ квадрату изъ ВН, и квадрата изъ ВН къ прямоугольнику въ ВН, НС: посему отношеніе квадрата изъ АН къ квадрату изъ ВН совокупленное съ отношеніемъ АН къ НВ, есть тоже, что и отношеніе квадрата изъ АН къ прямоугольнику въ ВН, НС.

(94) Ибо вообще, ежели будутъ два квадрата или два прямоугольника А, В (фиг. 8) и двѣ прямыя С, D такія, что А къ В имѣетъ меньшее отношеніе, нежели С къ D; то параллелепипедъ въ крайнихъ меньше параллелепипеда въ среднихъ, то есть А на D меньше В на С.

Пусть будетъ какъ А къ В, такъ С къ Е: посему D меньше Е, и А на D меньше А на Е.
34, XI. Но А на Е равенъ В на С: посему А на D меньше В на С.

Обратно, ежели помянутыя А, В, С, D будутъ такія, что А на D меньше В на С, то А къ В имѣетъ меньшее отношеніе, нежели С къ D.

Пусть будетъ А на Е равенъ В на С: посему
32, XI. А на D меньше А на Е; а посему D меньше Е,

слѣдственно C къ E имѣетъ меньшее отношеніе, нежели C къ D. Но какъ A къ B, такъ C къ E: посему и A къ B имѣетъ меньшее отношеніе, нежели C къ D*. *13, V.

(95) Нежели цѣлая къ цѣлой, а тѣмъ паче большее, нежели, и проч.

(96) Поелику KB меньше AK, то и квадратъ изъ KB меньше квадрата изъ AK, посему квадраты изъ AK, KB, то есть квадратъ изъ AB, меньше двукратнаго квадрата изъ AK.

(97) Ибо, протянувъ радіусъ BQ (фиг. 18), будетъ уголъ AQB тупый: посему квадратъ изъ AB больше квадратовъ изъ AQ, QB, то есть больше двукратнаго квадрата изъ радіуса.

(98) Ежели прямая разсѣчена дважды на неравныя; то прямоугольникъ въ наименьшей и въ остальной части, меньше прямоугольника содержимаго въ другихъ двухъ частяхъ цѣлой прямой.

Пусть прямая AB (фиг. 19) будетъ разсѣчена на неравныя въ C и въ D, такъ что AC, AD суть меньше остальныхъ BC, BD. Говорю, что прямоугольникъ въ AD, DB меньше прямоугольника въ AC, CB.

Разсѣки AB по поламъ въ E. Итакъ прямоугольникъ въ AC, CB купно съ квадратомъ изъ CE, равенъ квадрату изъ EB*; и прямоугольникъ въ *5, II.
AD, DB купно съ квадратомъ изъ DE, равенъ тому же квадрату изъ BE: посему прямоугольникъ въ AD, DB купно съ квадратомъ изъ DE, равенъ прямоугольнику въ AC, CB купно съ квад-

ратомъ изъ CE. Но въ нихъ квадратъ изъ DE
k, l. больше квадрата изъ CE; ибо DE больше CE: посему остальный прямоугольникъ въ AD, DB, меньше прямоугольника въ AC, CB. Ч. И Д. Н.

Отсюда явствуетъ, что при разсѣченіи прямой линіи, прямоугольникъ въ равныхъ частяхъ, то есть квадратъ изъ половины, будетъ наибольшій.

Иначе. Около AB напиши кругъ; и отъ D, C, E проведи подъ прямыми углами къ AB прямыя DF, CG, EH. Итакъ прямоугольникъ въ AD, DB равенъ квадрату изъ DF; прямоугольникъ въ AC, CB равенъ квадрату изъ CG; и прямоугольникъ въ AE, EB равенъ квадрату изъ EH. Но квадратъ изъ DF меньше квадрата изъ CG, а сей меньше квадрата изъ EH, который есть наибольшій: посему прямоугольникъ въ AD, DB меньше прямоугольника въ AC, CB, а сей меньше прямоугольника въ AE, EB, то есть квадрата изъ EB, который изъ всѣхъ ихъ есть наибольшій.

(99) Ибо, протянувъ BC, поелику какъ CA къ
сл. 8, v. AB, такъ AB къ AK: то квадратъ изъ AB равенъ прямоугольнику въ AC, AK, то есть двумъ въ CO, AK. Но AB равна EF, и квадратъ изъ EF равенъ двумъ изъ EL, то есть изъ AR: посему квадратъ изъ AR равенъ прямоугольнику въ AK, CO.

(100) То есть прямоугольникъ въ AR, RC съ квадратомъ изъ AR, больше прямоугольниковъ въ AK, KC, и въ AK, CO. Но прямоугольникъ въ AR, RC съ квадратомъ изъ AR, равенъ прямо-

угольнику въ AR, CA*; а прямоугольники въ AK, *3, II.
KC и въ AK, CO равны прямоугольнику въ AK, KO: посему и проч.

(101) И дѣйствительно, поелику какъ OC къ CK, такъ, по положенію, MA къ AK: то совокупленіемъ, какъ OK къ KC, такъ MK къ KA: посему прямоугольникъ въ OK, KA равенъ прямоугольнику въ MK, KC.

(102) По доказанному въ примѣчаніи 62.

(103) Что квадратъ изъ AB къ квадрату изъ BK имѣетъ большее отношеніе, нежели MK къ AR: а посему, взявъ половины предъидущихъ членовъ, явствуетъ, что, и проч.

(104) Половина MK къ AR, то есть MK, и проч.

(105) Ибо, естьли будетъ, какъ кругъ около FH къ кругу около BD, такъ AM къ нѣкоей прямой: то сія прямая меньше LN; и конусъ коего основаніе кругъ около FH, а высота сія меньшая прямая, будетъ равенъ конусу MBD, но меньше конуса NHF, слѣдственно и конусъ MBD меньше конуса NHF.

КЪ ИЗМѢРЕНІЮ КРУГА.

(106) И преложеніемъ: посему какъ треугольники ACE, AEF къ треугольнику ACD, такъ 21, 1 къ 7*, то есть какъ треугольникъ ACF, и проч. *24, V.

(107) А посему какъ треугольникъ ACF къ четырекратному треугольнику ACD, такъ 22 къ 4жды 7, то есть къ 28.

(108) То есть квадратъ CG равенъ четырекратному треугольнику ACD.

(109) Ибо, продолживъ FC къ I (фиг. 20), и положивъ CI равную FC, и протянувъ EI, будетъ IE равна FE, и уголъ IEC равенъ углу CEF: посему цѣлый уголъ FEI равенъ двумъ третямъ прямагo. И поелику всякагo треугольника всѣ три угла равны двумъ угламъ прямымъ, то прочіе углы F, I треугольника FEI равны четыремъ третямъ прямаго: посему каждый равенъ двумъ третямъ, ибо FE равна EI. Итакъ треугольника FEI всѣ углы взаимно равны, слѣдственно и стороны взаимно равны: посему FE есть двукратная прямыя FC. Чего ради какъ FE къ FC, такъ 2 къ 1, или такъ 306 къ 153: посему какъ квадратъ изъ FE къ квадрату изъ FC, такъ въ степеняхъ 306 къ 153; и посему, отдѣленіемъ, какъ избытокъ квадрата изъ FE предъ квадратомъ изъ FC къ квадрату изъ FC, такъ избытокъ 93636 предъ 23409 къ 23409, то есть, какъ квадратъ изъ EC къ квадрату изъ FC, такъ 70227 къ 23409; а посему какъ EC къ FC, такъ въ корняхъ или линіяхъ 70227 къ 23409. Но корень числа 70227 есть 265 съ остаткомъ 2, слѣдственно онъ больше 265, а корень 23409 есть 153: посему корень числа 70227 къ корню числа 23409 имѣетъ большее отношеніе, нежели 265 къ 153; а посему, и проч.

(110) И поелику, по доказанному, FE къ FC имѣетъ тоже отношеніе, что 306 къ 153, а

ЕС къ FC имѣетъ большее, нежели 265 къ 153; то и совокупленіемъ, первая съ пятою къ второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья съ шестью къ четвертой, по Леммѣ[+], то есть FE, ЕС къ FC имѣетъ большее отношеніе, нежели 306 съ 265, то есть 571 къ 153. Доказано же, что FE, ЕС къ FC имѣетъ тоже отношеніе, что ЕС къ CG: слѣдственно, и проч. + въ (123).

(111) Чего ради квадратъ изъ ЕС къ квадрату изъ CG имѣетъ большее отношеніе, нежели въ степеняхъ 571 къ 153; и совокупленіемъ, квадраты изъ ЕС, CG къ квадрату изъ CG имѣютъ большее отношеніе, нежели въ степеняхъ 571, 153 къ 153. Но квадраты изъ ЕС, CG равны квадрату изъ EG, а въ степеняхъ числа 571, 153, то есть числа 326041, 23409, равны числу 349450: посему квадратъ изъ EG къ квадрату изъ CG имѣетъ большее, и проч.

(112) И потому EG къ CG имѣетъ большее отношеніе, нежели корень числа 349450 къ корню числа 23409. Поелику же корень числа 349450 есть 591 $\frac{1}{8}$ съ остаткомъ 21 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{15}$, а числа 23409 есть 153; то корень перваго къ корню другаго имѣетъ большее отношеніе, нежели 591 $\frac{1}{8}$ къ 153: а посему, и проч.

(113) Опять, сходно съ предъидущимъ, докажется, что изъ треугольника GEC будетъ, какъ GE, ЕС къ GC, такъ СЕ къ СН; и по причинѣ, что ЕС къ GC имѣетъ большее отношеніе, нежели 571 къ 153, а GE къ GC большее, нежели

$591\frac{1}{8}$ къ 153, будетъ EC, GE, къ GC имѣть большее, нежели 571, $591\frac{1}{8}$ къ 153: и потому EC, и проч.

(114) Чего ради, сходно съ прежнимъ, и квадраты изъ EC, HC къ квадрату изъ HC имѣютъ большее отношеніе, нежели въ степеняхъ $1162\frac{1}{8}$ съ 153 къ 153, или квадратъ изъ EH къ квадрату изъ HC имѣетъ большее, нежели $1373943\frac{1}{2}\frac{1}{64}$ къ 23409; а посему EH къ HC имѣетъ большее отношеніе, нежели $1172\frac{1}{8}$ къ 153: ибо корень числа $1373943\frac{1}{2}\frac{1}{64}$ есть $1172\frac{1}{8}$ съ остаткомъ $66\frac{1}{2}$.

(115) Нежели $1162\frac{1}{8}$, $1172\frac{1}{8}$ къ 153, что докажется какъ и прежде, и слѣдовательно большее, нежели, и проч.

(116). Чего ради сходно съ прежними случаями, квадраты изъ EC, CK, то есть квадратъ изъ EK къ квадрату изъ KC будетъ имѣть большее отношеніе, нежели въ степеняхъ $2334\frac{1}{4}$, 153, то есть $5472132\frac{1}{16}$, къ 23409; а посему EK къ KC имѣетъ большее, нежели $2339\frac{1}{4}$ къ 153: ибо корень числа $5472132\frac{1}{16}$ есть $2339\frac{1}{4}$ при остаткѣ $41\frac{1}{2}$.

(117) И дѣйствительно, поелику какъ AC къ CB, такъ, по доказанному прежде, 2 къ 1 и такъ 1560 къ 780; и какъ квадратъ изъ AC къ квадрату изъ CB, такъ въ степеняхъ 1560 къ 780: посему отдѣленіемъ, какъ квадратъ изъ AB къ квадрату изъ CB, такъ 1825200 къ 608400, а посему какъ AB къ BC, такъ въ корняхъ 1825200 къ 608400. Поелику же корень числа 1825200 есть 1351 съ

недостаткомъ 1, и слѣдовательно онъ меньше числа 1351, а корень числа 608400 есть 780; то корень числа 1825200 къ корню числа 608400 имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 1351 къ 780: посему и AB къ BC имѣетъ меньшее, нежели 1351 къ 780.

(118) Доказано же, что CA къ BC имѣетъ тоже отношеніе, что 1560 къ 780, и AB къ BC имѣетъ меньшее, нежели 1351 къ 780; слѣдственно, по леммѣ, CA, AB къ BC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 1560, 1351 къ 780, то есть, нежели 2911 къ 780: чего ради, и проч.

(119) И потому квадраты изъ AG, GC, то есть квадратъ изъ AC къ квадрату изъ GC имѣетъ меньшее, нежели 9082321 къ 608400, и, по причинѣ что корень числа 9082321 есть $3013 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ съ недостаткомъ $368 \frac{1}{16}$, AC къ CG, и проч.

(120) То есть послѣднія два числа получатся, умноживъ оба первыя на 4, и раздѣливъ на 13.

(121) Ибо 2911 съ $3013 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ дѣлаетъ $5924 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$; квадраты же изъ AH, HC равны квадрату изъ AC; а въ степеняхъ числа 1823, 240 равны числу 3380929, коего корень есть $1838 \frac{9}{11}$ при недостаткѣ почти 323.

(122) Потому, что въ степеняхъ числа 1007, 66 равны числу 1018405, коего корень есть $1009 \frac{1}{6}$ при недостаткѣ $12 \frac{1}{3} \frac{1}{36}$.

(123) Потому опять, что въ степеняхъ числа

$2016\frac{1}{6}$, 66 даютъ число $4069284\frac{1}{36}$, коего корень есть $2017\frac{1}{4}$ съ недостаткомъ почти $13\frac{1}{2}\frac{1}{29}$.

(124) Ибо 6336 раздѣленное на $2017\frac{1}{4}$ дастъ $3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$, а $\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$ значитъ тоже что $\frac{1137}{8069}$ или $\frac{11370}{80690}$; или, раздѣливъ оба члена на 1137, будетъ $\frac{10}{70\frac{1100}{1137}}$, дробь, которая больше нежели $\frac{10}{71}$.

Лемма. Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, и пятая ко второй имѣетъ большее, нежели шестая къ четвертой: то и совокуплено, первая съ пятою ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели третья съ шестою къ четвертой.

Пусть будутъ шесть величинъ AB, C, DE, F, BG, EH (фиг. 21) такія, что AB къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели DE къ F, и BG къ C имѣетъ большее, нежели EH къ F. Говорю, что и совокупленно, AG къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели DH къ F.

Вообрази величину BK, которая къ C имѣетъ тоже отношеніе, что DE къ F: почему BK меньше AB*. Вообрази еще величину BL, которая къ C имѣетъ тоже отношеніе, что EH къ F: посему BL меньше BG.

*10, V.

Итакъ, поелику первая BK ко второй C имѣетъ тоже отношеніе, что третья DE къ четвертой F, и пятая BL ко второй C имѣетъ тоже

отношеніе, что шестая EH къ четвертой F; то и совокупленно, первая съ пятою, то есть KL, ко второй C имѣетъ тоже отношеніе, что и третья съ шестою, то есть DH, къ четвертой F*. Но AG къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели KL къ C*: посему AG къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели и DH къ F. *24, r. *8, r.

Естьлибы AB къ C имѣла тоже отношеніе, что DE къ F; а BG къ C имѣла большее, нежели EH къ F: то подобно докажется, что AG къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели DH къ F, взявъ величину BL такую, которая бы къ C имѣла тоже отношеніе, что и EH къ F.

* * *

Желая познакомить съ симъ весьма важнымъ предложеніемъ (т. е. III) даже и тѣхъ изъ читателей, кои не могли, или просто нехотѣли вникнуть въ ѳеорію величинъ пропорціональныхъ Эвклида, я помѣщу здѣсь доказательство онаго, облеченное въ формулы уравненій (*).

Всякаго круга окружность равна тремъ его поперечникамъ съ избыткомъ, который меньше

(*) *Названіе уравненія принимается здѣсь въ общемъ значеніи, то есть, подъ онымъ разумѣются и такъ называемыя неравенства, которыя (мимоходомъ замѣтимъ) издатели пространныхъ курсовъ столь же несправедливо исключаютъ изъ правилъ уравненій, какъ и неравныя отношенія изъ правилъ пропорцій.*

нежели седмая часть, а больше нежели десять семьдесять первыхъ поперечника.

Пусть будетъ кругъ, коего поперечникъ AC и центръ E. Отъ E поставь перпендикулярный къ AC другой поперечникъ; и раздѣли одинъ изъ прямыхъ угловъ, кои при центрѣ, на три равныя части, и пусть одна часть будетъ уголъ CEF; и проведи касательную въ C къ кругу прямую MCF; и раздѣли по поламъ уголъ FEC прямою EG, уголъ GEC прямою EH, уголъ HEC прямою EK, и наконецъ уголъ KEC прямою EL; и сдѣлай уг. CEM = уг. CEL. *

Положимъ $EF = a$, $FC = b$, $EG = a'$; $CG = b'$, $EH = a''$, $CH = b''$, $EK = a'''$, $CK = b'''$, $EL = a''''$, $CL = b''''$; и еще $EC = r$, $AC = 2r = 2d$, и окружность круга $= O$.

Поелику въ прямоугольномъ треугольникѣ CEF уголъ CEF есть третья часть прямаго; то, по доказанному нами, будетъ $EF : FC :: 2 : 1 :: 306 : 153$, или $a : b :: 306 : 153$,

то есть $$\frac{a}{b} = \frac{306}{153}$$

Притомъ, изъ пропорціи $a : b :: 306 : 153$ слѣдуетъ, что $a^2 : b^2 :: 306^2 : 153^2$, то есть $93636 : 23409$; посему $a^2 - b^2 : b^2 :: 93636 - 23409 : 23409$, то есть $r^2 : b^2 :: 70227 : 153^2$; слѣдственно $153^2 . r^2 = 70227 . b^2$, и $153\,r = b\sqrt{(70227)}$. Но $\sqrt{(70227)} = 265$ при небольшомъ остаткѣ: посему $153\,r > 265\,b$,

а посему $$\frac{r}{b} > \frac{265}{153}.$$

И поелику треугольника FEC уголъ FEC раздѣленъ по поламъ; то EF : EC : : FG : GC, то есть a:r: :b—b':b', посему совокупленіемъ, a+r:r: :b:b', и премѣненіемъ, a+r : b : : r : b',

чего ради $$\frac{a+r}{b}=\frac{r}{b'}.$$

Доказано же, что $\frac{a}{b}=\frac{306}{153}$, a $\frac{r}{b}>\frac{265}{153}$, посему $\frac{a+r}{b}>\frac{306+265}{153}$, то есть $>\frac{571}{153}$,

а посему $$\frac{r}{b'}>\frac{571}{153}$$

Отсюда найдется $\frac{r^2}{b'^2}+1>\frac{571^2}{153^2}+1$, или $\frac{r^2+b'^2}{b'^2}$, то есть $\frac{a'^2}{b'^2}>\frac{349450}{153^2}$. Но корень числа 349450 есть $591\frac{1}{8}$ при остаткѣ $21\frac{15}{64}$:

посему $$\frac{a'}{b'}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}.$$

Точно такимъ же образомъ и изъ треугольника GEC найдется, что

$$\frac{a'+r}{b'}=\frac{r}{b''};$$

а поставивъ на мѣсто $\frac{a'}{b'}$, $\frac{r}{b'}$ числа прежде найденныя, будетъ $\frac{a'+r}{b'}>\frac{571+591\frac{1}{8}}{153}$:

посему и $$\frac{r}{b''}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153}.$$

Отсюда же, сходно съ прежнимъ, найдется $\frac{r^2 + b''^2}{b''^2}$ то есть $\frac{a''^2}{b''^2} > \frac{1373943\frac{1}{2}\frac{1}{64}}{153^2}$,

и $$\frac{a''}{b''} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}:$$

ибо корень числа $1373943\frac{1}{2}\frac{1}{64}$ есть $1172\frac{1}{8}$ при остаткѣ $66\frac{1}{2}$.

Равнымъ образомъ и изъ треугольника HEC выдетъ

$$\frac{a'' + r}{b''} = \frac{r}{b'''};$$

и потомъ $\frac{a'' + r}{b''}$, или

$$\frac{r}{b'''} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153};$$

Отсюда же, такожъ по прежнему будетъ $\frac{r^2 + b'''^2}{b'''^2}$

то есть $\frac{a'''^2}{b'''^2} > \frac{5472132\frac{1}{16}}{153^2}$,

посему $$\frac{a'''}{b'''} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}:$$

ибо корень числа $5472132\frac{1}{16}$ есть $2339\frac{1}{4}$ при остаткѣ $41\frac{1}{2}$.

Напослѣдокъ, изъ треугольника KEC такъ же найдется

$$\frac{a''' + r}{b'''} = \frac{r}{b''''},$$

а отсюда $\frac{r}{b''''} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, и $\frac{d}{2b''''} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$.

Итакъ, поелику уголъ FEC, который есть третья часть прямаго, раздѣленъ четыре раза по поламъ; то уголъ LEC есть $\frac{1}{48}$ а уголъ LEM $\frac{2}{24}$ или $\frac{4}{96}$ прямаго: слѣдственно LM или $2b''''$ будетъ сторона девяностошестиугольника описаннаго; а $96.2b''''$ будетъ очертаніе онаго. И какъ, по доказанному, $\frac{d}{2b''''} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, посему $\frac{d}{96.2b''''} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$, а посему $96.2b'''' < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}d$. Но $O < 96.2b''''$, то есть окружность круга меньше девяностошестиугольника описаннаго; посему тѣмъ паче $O < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}d$.

А $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}\frac{2}{1335}$; итакъ тѣмъ паче

$$O < 3\tfrac{1}{7}d,$$

то есть окружность круга меньше нежели его три поперечника съ седмою онаго частію.

Пусть опять будетъ кругъ, его поперечникъ AC, и уголъ BAC треть прямаго. Раздѣли опять по поламъ уголъ BAC прямою AG, уголъ GAC прямою AH, уголъ HAC прямою AK, и наконецъ уголъ KAC прямою AL; и протяни CB, CG, CH, CK, CL.

Означимъ прямыя AB, AG, AH, AK, AL чрезъ a, a', a'', a''', a'''', а CB, CG, CH, CK, CL чрезъ b, b', b'', b''', b'''', и поперечникъ AC чрезъ d.

И такъ, сходно съ предыдущимъ, будетъ AC:BC :: 2 : 1 :: 1560 : 780, или d : b :: 1560 : 780,

то есть $$\frac{d}{b} = \frac{1560}{780}.$$

Притомъ, изъ пропорціи d:b::1560:780 слѣдуетъ, что $d^2 : b^2$ :: 2433600 : 608400; посему $d^2 - b^2 : b^2$, или $a^2 : b^2$ :: 1825200 : 780^2; слѣдственно $$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{(1825200)}}{780}.$$ Но $\sqrt{(1825201)}$ есть 1351; посему $$\frac{a}{b} < \frac{1351}{780}.$$

И поелику уголъ BAG равенъ какъ углу GCB такъ и углу GAC, то уг. GCB = уг. GAC, и уголъ AGC есть общій треугольникамъ AGC, CGF: слѣдственно сіи треугольники равноугольны и подобны, и будетъ AG : GC :: CG : GF :: AC : CF. Сверхъ того, поелику треугольника BAC уголъ BAC раздѣленъ по поламъ, то AB : AC :: FB : CF; посему AB + AC : AC :: BC : CF, и AB + AC : BC :: AC : CF. Доказано, что AG : GC :: AC : CF: посему AG : GC :: AB + AC : BC, то есть $a' : b'$ :: a + d : b;

чего ради $$\frac{a + d}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Доказано же, что $\frac{d}{b} = \frac{1560}{780}$, а $\frac{a}{b} < \frac{1351}{780}$;

посему $$\frac{a + d}{b} < \frac{2911}{780},$$

а посему $$\frac{a'}{b'} < \frac{2911}{780}.$$

Отсюда найдется $\frac{d^2+b'^2}{b'^2}$ или $\frac{d^2}{b'^2} < \frac{9082321}{780^2}$.

Но корень числа 9082321 есть $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ при недостаткѣ $368\frac{1}{16}$;

посему $$\frac{d}{b'} < \frac{3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{780}.$$

Точно такимъ же образомъ отъ треугольника AGC найдется, что
$$\frac{a'+d}{b'} = \frac{a''}{b''};$$
а поставивъ на мѣсто $\frac{a'}{b'}$, $\frac{d}{b'}$, числа прежде найденныя, будетъ $\frac{a'+d}{b'} < \frac{5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{780}$, или, умноживъ сей дроби оба члена на $\frac{4}{13}$, $\frac{a'+d}{b'} < \frac{1823}{240}$:

посему и $$\frac{a''}{b''} < \frac{1823}{240}.$$

Отсюда же, сходно съ прежнимъ, найдется $\frac{a''^2+b''^2}{b''^2}$ или $\frac{d^2}{b''^2} < \frac{3380929}{240^2}$,

и $$\frac{d}{b''} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}:$$

ибо корень числа 3380929 есть $1838\frac{9}{11}$, при недостаткѣ почти 323.

Равнымъ образомъ отъ треугольника HAC выдетъ $$\frac{a''+d}{b''} = \frac{a'''}{b'''},$$

а потомъ $\frac{a''+d}{b''}$ или $\frac{a'''}{b'''} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240}$, или, ум-

поживъ сей дроби оба члена на $\frac{11}{40}$,

$$\frac{a'''}{b'''} < \frac{1007}{66}.$$

Отсюда же, такожъ по прежнему, будетъ

$$\frac{a'''^2 + b'''^2}{b'''^2}, \text{ то есть } \frac{d^2}{b'''^2} < \frac{1018405}{66^2},$$

посему

$$\frac{d}{b'''} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}:$$

ибо корень числа 1018405 есть $1009\frac{1}{6}$ при недостаткѣ $12\frac{1}{3}\frac{1}{36}$.

Напослѣдокъ, отъ треугольника KAC такъ же найдется

$$\frac{a''' + d}{b'''} = \frac{a''''}{b''''},$$

и потомъ $\frac{a''' + d}{b'''}$ или $\frac{a''''}{b''''} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$, а отсюда

$$\frac{a''''^2 + b''''^2}{b''''^2}, \text{ то есть } \frac{d^2}{b''''^2} < \frac{4069284\frac{1}{36}}{66^2},$$

а

$$\frac{d}{b''''} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}:$$

ибо корень числа $4069284\frac{1}{36}$ есть $2017\frac{1}{4}$ при недостаткѣ почти $13\frac{1}{2}\frac{1}{29}$.

И такъ, поелику уголъ LEC есть $\frac{1}{48}$ прямаго; то уголъ при центрѣ, стягиваемый прямою LC есть $\frac{2}{48}$ или $\frac{4}{96}$ прямаго: слѣдственно прямая LC или b'''' будетъ сторона девяностошести-

угольника вписаннаго, а $96b''''$ будетъ очертаніе онаго. И какъ, по доказанному $\frac{d}{b''''} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$, посему

$$\frac{d}{96b''''} < \frac{2017\frac{1}{4}}{6336}, \quad \text{а посему} \quad 96b'''' > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}d.$$

Но $O > 96b''''$, то есть окружность круга больше девяностошестиугольника вписаннаго; посему тѣмъ паче

$$O > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}d.$$

$$\text{А } \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = 3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} = 3\frac{1137}{8069} = 3\frac{11370}{80690} = 3\frac{10}{70\frac{1100}{1137}},$$

то есть $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < 3\frac{10}{71}$; итакъ тѣмъ паче

$$O > 3\frac{10}{71}d,$$

то есть окружность круга больше, нежели три его поперечника и десять семьдесятъ первыхъ онаго частей.

Доказано же, что она меньше нежели три поперечника съ седьмою онаго частію: слѣдовательно всякаго круга окружность равна, и проч. Ч. И Д. Н.

Поелику же окружность заключается между $3\frac{1}{7}d$ и $3\frac{10}{71}d$, коихъ разность весьма мала; то, принявъ, что $O = 3\frac{1}{7}d$, будетъ

$$7 : 22 :: d : O,$$

то есть, окружность круга къ поперечнику имѣетъ отношеніе, почти какъ 22 къ 7.

КЪ ЛЕММАМЪ.

(125) Но пусть два круга ABE, DCE (табл. 7) взаимно касаются внѣ, въ точкѣ E; и пусть опять ихъ поперечники DC, AB будутъ взаимно параллельны, и протянутся DE, EB. Говорю, что DEB есть прямая.

Пусть опять будутъ F, G центры круговъ; и протяни прямую FG, которая необходимо пройдетъ чрезъ E*. И поелику DC параллельна къ AB,
*12, III. то уголъ DGE равенъ углу EFB: посему равнобедренныхъ треугольниковъ DGE, EFB углы GDE, GED, равные взаимно, равны угламъ FEB, FBE; а посему и уголъ GED равенъ углу FEB. Придай обще уголъ BEG: посему углы GED, GEB равны угламъ FEB, BEG. Но углы FEB, BEG равны двумъ угламъ прямымъ: посему и углы DEG, GEB равны двумъ прямымъ. Чего ради DEB
14, I. есть прямая.

(126) И дѣйствительно, поелику углы DBG, DGB равны прямому, также и углы BCD, CBD; то углы DBG, DGB равны угламъ BCD, CBD. Но въ нихъ уголъ CBD, то есть BCE, равенъ углу DBG, то есть BAE, ибо AB равна BC: посему остальный уголъ DGB равенъ остальному DCB; а посему BG равна BC. Чего ради треугольникъ GBD равенъ треугольнику DBC: слѣдственно GD равна DC.

(127) Сочиненіе сіе не дошло до насъ.

(128) И дѣйствительно, поелику какъ AD къ DC, такъ AF къ FE; и какъ GD къ AD, такъ CF

къ AF*: то равномѣстно, какъ GD къ DC, такъ CF къ FE. Но GD равна DC: посему и CF равна FE*. *4, VI. *22, V.

(129) Такъ доказано сіе предложеніе въ Арабскомъ переводѣ. Торелли, замѣтивъ (*), что здѣсь говорится объ особенномъ случаѣ, полагаетъ, что въ Греческомъ подлинникѣ было доказательство общее, каково слѣдующее:

Пусть будетъ полукружіе CBA, къ коему касаются DC, DB; и пусть будетъ BE перпендикулярна къ AC, и протянута AD. Говорю, что BF равна FE.

Протяни AB; и продолжи оную и CD, пока встрѣтятся какъ въ I; возьми полукружія центръ G; и проведи GB, и чрезъ B проведи параллельную къ AC прямую BH. И поелику уголъ EBH равенъ углу GBD*; то, отнявъ общій уголъ EBD, будетъ остальный уголъ DBH равенъ остальному GBE. А и уголъ IBH равенъ углу ABG, ибо каждый равенъ углу IAC*: посему уголъ IBD, сложенный изъ двухъ DBH, IBH, равенъ углу ABE, сложенному изъ двухъ GBE, ABG. Но и уголъ BID равенъ углу ABE: слѣдственно уголъ IBD равенъ BID; чего ради BD равна ID*. Но BD равна DC: посему и ID равна DC*. Сверхъ того, поелику BE параллельна къ IC: то какъ AD къ AF, то есть какъ ID къ BF, такъ DC къ FE. Но ID равна DC: посему и BF равна FE*. Ч. И Д. Н. *акс. 10. *5 и 29, I. *6, I. *2, III. *14, V.

(*) *Archimedis quæ supersunt omnia. Præfat. pag. XIX.*

(130) Квадратамъ изъ DB, AD, DC и прямоугольнику въ AD, DC, то есть двукратному, и проч.

(131) Для доказательства сего, должно предварительно знать слѣдующее предложеніе:

Ежели въ треугольникѣ ABD, отъ вершинъ A, B двухъ угловъ, проведутся перпендикулярныя къ сторонамъ BD, AD, прямыя AI, BF, встрѣчающія взаимно въ E, а отъ вершины D третьяго угла до E протянута будетъ прямая DE, и продолжена, пока встрѣтитъ третью сторону въ нѣкоей точкѣ C: то и DC будетъ перпендикулярна къ AB.

Около AB напиши кругъ, то окружность его пройдетъ чрезъ точки F, I, ибо углы при нихъ суть прямые; и около DE напиши также кругъ, то и его окружность пройдетъ чрезъ F, I; и протяни FI. Поелику уголъ EDI равенъ углу EFI, ибо суть въ томъже отрѣзкѣ; и уголъ BFI равенъ углу BAI: посему уголъ BAI равенъ углу BDC. Но уголъ при B есть общій треугольникамъ BAI, BDC: посему остальный уголъ AIB, который есть прямый, равенъ остальному BCD. Итакъ DC перпендикулярна къ AB.

Изъ сего слѣдуетъ, что естьли отъ трехъ угловъ треугольника проведутся къ сторонамъ перпендикуляры: то всѣ они пресѣкутся въ одной точкѣ.

Теперь докажемъ предложеніе, предполагаемое Архимедомъ, а именно:

Ежели отъ концовъ D, B двухъ прямыхъ AD, AB, дѣлающихъ уголъ, опустятся отъ одной на другую перпендикуляры DC и BF, и еще на проведенную AE и продолженную опустится отъ одного конца B перпендикулярная BI; и протянется DI: то BID будетъ прямая.

Ибо, естьли не такъ, то пусть будетъ DGB прямая. Итакъ уголъ BGA, по предыдущему, есть прямый. Но и уголъ BIG прямый, по положенію: посему два угла треугольника BGI равны двумъ прямымъ, что невозможно*. Слѣдственно прямая протянутая отъ D до B не пройдетъ, какъ DGB: и потому будетъ DIB. * 17, I.

(132) Изъ подобія треугольниковъ ADC, DHE, въ коихъ HE параллельна къ AC.

(133) Слѣдовательно сіе предложеніе можно доказать вообще.

(134) Предложеніе, упоминаемое здѣсь, можно доказать слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ четыреугольникъ ABDC, коего сторона AB равна сторонѣ AC, и уголъ BDC равенъ двумъ угламъ ABD, ACD. Говорю, что AD равна AB или AC.

Продолжи CA до E, и сдѣлай AE равную AC, и протяни EB. Поелику AE равна AB, то уголъ AEB равенъ углу ABE: итакъ уголъ BDC съ угломъ AEB равенъ тремъ угламъ DCA, DBA, ABE, то есть двумъ угламъ DCA, DBE. Но четыре угла всякаго четыреугольника равны четыремъ

прямымъ: посему каждые два противулежащіе угла четыреугольника BDCE равны двумъ прямымъ; а посему около четыреугольника BDCE можно описать кругъ (*). Опиши оный. И поелику отъ точки A, внутри сего круга лежащей, проведены три прямыя AC, AB, AE взаимно равныя; то A
9, III. есть центръ круга: посему AD равна AB или AC.

(135) Ибо уголъ при центрѣ составляетъ пятую часть четырехъ угловъ прямыхъ.

(136). Поелику полукружіе содержитъ пять дугъ равныхъ CD; то уголъ BDC стоитъ на шести таковыхъ дугахъ, слѣдственно онъ шестикра́тный угла CBD, то есть шестикратный пятои части прямаго, то есть равенъ шести пятыхъ прямаго.

(137) Въ 9 предложеніи XIII книги, которая еще не переведена на Россійскій языкъ.

(*) Нач. О. Чис. М. Фусса. Ч. II. § 165.

СОДЕРЖАНІЕ ПРЕДМѢТОВЪ.

Положенія или начала.

Предложенія.

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ. Книга II.

Предложенія.

ИЗМѢРЕНІЕ КРУГА.

Предложенія.

ЛЕММЫ.

Предложенія.

ПРИМѢЧАНІЯ.

КОНЕЦЪ.

Замѣченныя опечатки.

Стрн.	*стр.*	*напечатано:*	*читай:*
7	22	къ AG	къ AC
9	4	DGE	DGC
—	26	, нежели двукратный уголъ LKM	двукратнаго угла LKM, а двукратный угла TGC
11	2	конхъ HK	конхъ G
12	14	посему E	посему C
—	28	нежели E	нежели C
22	11	вершинъ	вершины
140	9	равна FN	равна EN
147	26	къ EG	къ EC
207	22	$21 \frac{1}{6} \frac{2}{15}$	почти $21 \frac{1}{6} \frac{1}{15}$

Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ книга I.

Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ книга I.

XV.

XVI.

Лемма.

XVII.

XVIII.

XIX.

XX.

XXI.

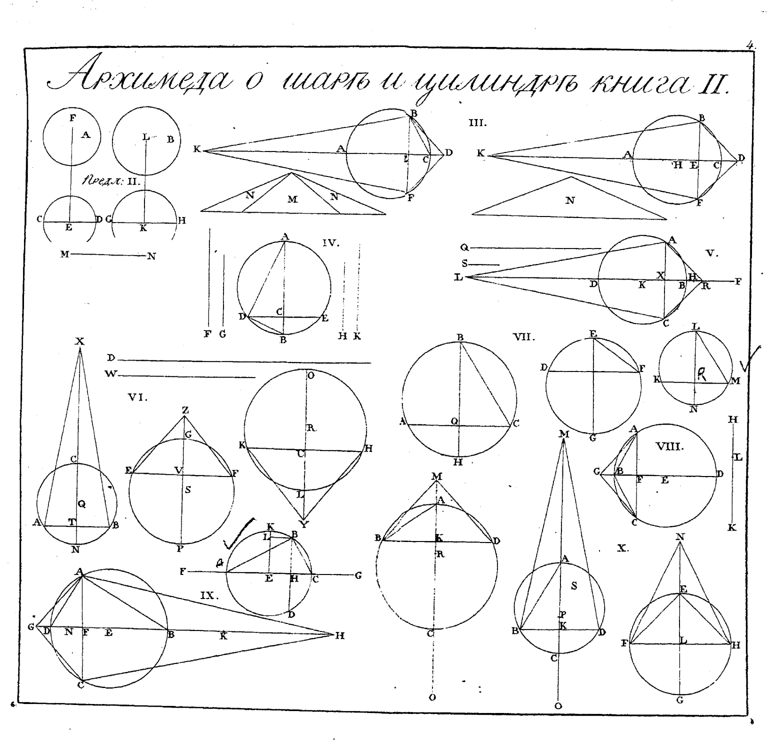
XXII.

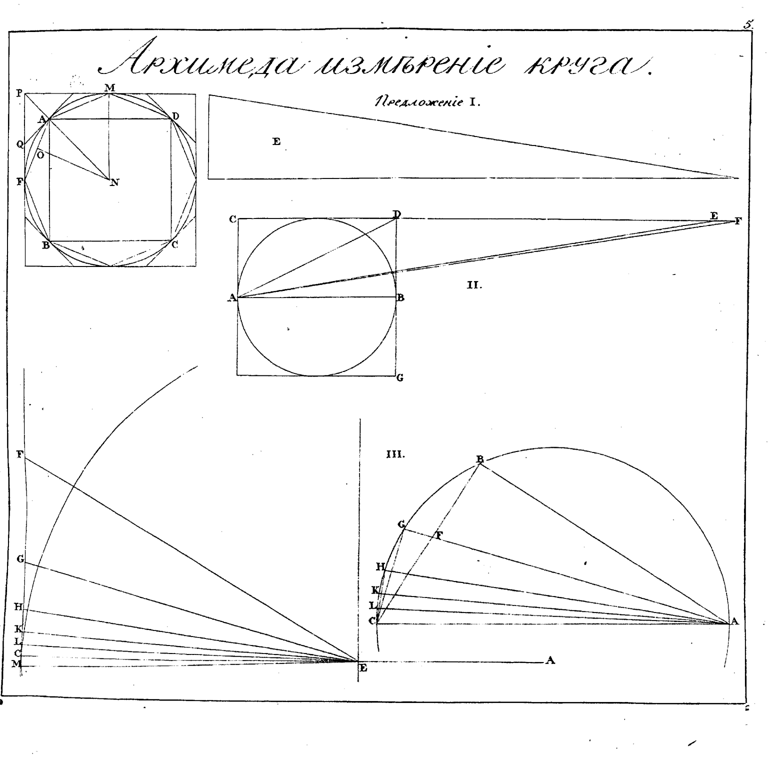
XXIII.

XXIV.

XXV.

Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ книга I.


Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ книга II.
Предл: II.
III.
IV.
V.
VI.
VII.
VIII.
IX.
X.


Архимеда измѣренiе круга.
Предложенiе I.
P
M
A
D
Q
O
F
N
B
C
E
C
D
E
F
A
B
II.
G
F
G
H
K
L
C
M
E
A
III.
B
G
F
H
K
L
C
A

Примѣч: къ книг: Архим: о шар: и цил: и къ изм: кр:

Фигура 1.

E A D C F B

2. B b A E D d C c

3. A B b C c D d E

4. K L M N H

5. G T N K L B M

6. A G C D B A

7. D G B F A C

8. A B C D E

9. L N K F A G M H

10. A E F D C K I H G

11. K I H G L M

12. A B E D C F G H

13. R Q S P A

14. K A H E D C

15. R G F E C S P

O R K U H L Y

16. A C B D E F

17. A F B C E D

18. A Q B

A D C E B

19. F G H A D C E B

20. F C E I

21. G L H B E K A C D F

Архимеда леммы.

Предл. I.

II.

III.

IV.

V.

VI.

VII.

VIII.

IX.

X.

XI.

XII.

XIII.

XIV.

XV.

Прим. къ I.

къ II.

къ V.

къ XII.